Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Základní veličiny, rovnice a vztahy
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Napjatost v tělese

Síly působící na těleso:

síly vnější – povrchové (tlak, tah, tření), objemové (např. gravitační)
síly vnitřní – vyvolané vzájemným působením částic tělesa, tvoří reakci vůči vnějším silám

Pojem napětí:

$$\sigma = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A}$$

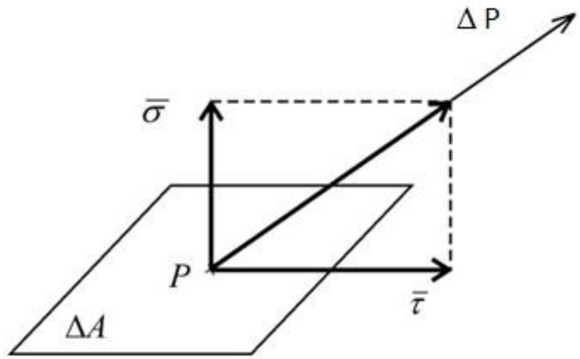
ΔP je síla působící na element plochy ΔA

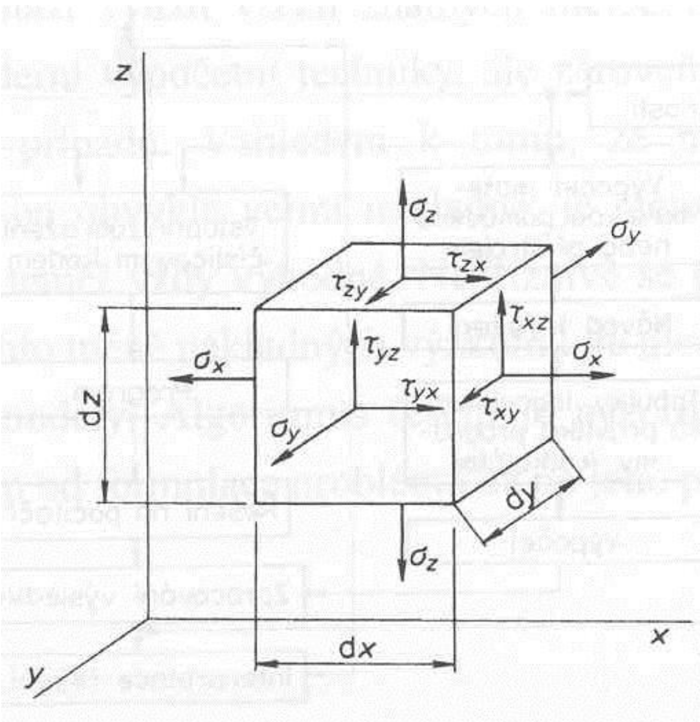
Základní složky napětí:

normálová složka napětí σ – složka kolmá k ploše ΔA

smyková složka napětí τ – složka ležící v ploše ΔA

Obecně lze definovat v obecném bodě tělesa celkem 9 složek napětí (3 složky normálové a 6 složek smykových napětí).





složky normálového napětí: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$

složky smykového napětí:

$\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$

z rovnic momentové rovnováhy od smykových sil plyne: $\tau_{xy}=\tau_{yx}$, $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$, tedy počet smykových napětí se redukuje na 3 (věta ovzájemnosti tečných napětí). Celkově tedy dostáváme 6 neznámých složek napětí.

Značení smykových napětí: první index značí směr osy kolmé k ploše, v níž napětí působí, druhý index označuje směr tohoto napětí

Tenzor napětí:

$$T_s = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Střední normálové napětí:

$$\sigma_s = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Objemový tenzor napětí:

$$T_{os} = \begin{vmatrix} \sigma_s & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_s & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_s \end{vmatrix}$$

Deviátor napětí:

$$D_s = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_s & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_s & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_s \end{vmatrix}$$

Obecně platí: Ts=Tos+Ds

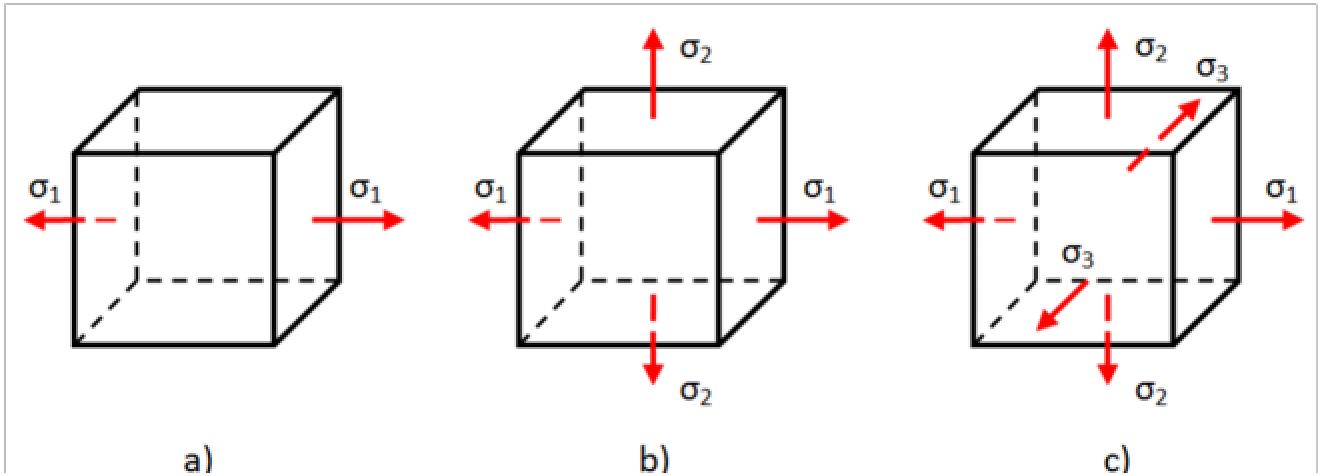
Hlavní napětí

Složky tenzoru napětí závisí na volbě soustavy souřadnic, při změně soustavy souřadnic se změní velikosti složek napětí.

V obecném bodě zatíženého tělesa existují 3 na sobě kolmé plochy, na nichž jsou tečná (smyková) napětí nulová a normálová napětí nenulová.

Tato normálová napětí se nazývají hlavní napětí, roviny, na nichž tato normálová napětí působí se nazývají roviny hlavní.

Základní typy napjatosti



Jednoosá napjatost:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

(např. tyč namáhaná tahem)

Dvouosá napjatost:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq \sigma_3 = 0$$

Např. těleso rovinného tvaru, u kterého jsou 2 rozměry větší než rozměr třetí (např. tenká deska)

Trojosá napjatost:

$$\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq 0$$

Obecný stav napjatosti

Invarianty – skalární veličiny, které se nemění se změnou soustavou souřadnic.

1. invariant: $I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$

2. invariant: $I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2$

3. invariant: $I_3 = \det T_s$

Invarianty vyjádřené v hlavních napětích σ1, σ2, σ3:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

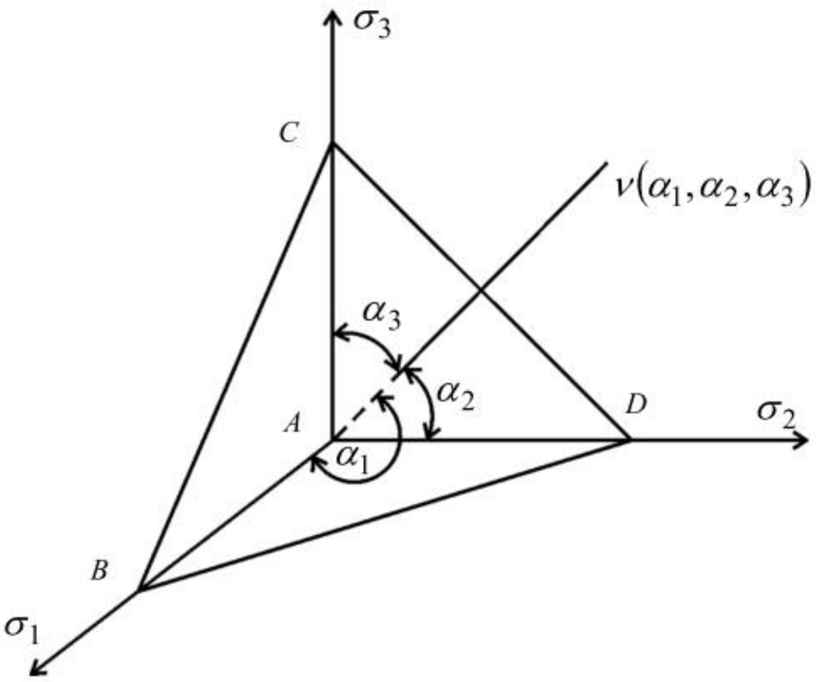
$$I_2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Oktaedrické napětí - napětí, příslušející k oktaedrické ploše

Oktaedrická plocha - plocha ve stejném sklonu ke každé hlavní ose

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Oktaedrické napětí:

$$\sigma_{n,okt.} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\tau_{okt.} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

Tyto roviny vymezují v souřadném systému hlavních napětí σ1,σ2,σ3 osmistěn napjatosti.

Deviátorová rovina

Deviátorová rovina – rovina kolmá k přímce $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$.

Tato přímka se nazývá hydrostatická osa.

Deviátorová rovina je určena podmínkou $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=konst.$

V této rovině se obvykle zobrazují obálky porušení.

Střední napětí (hydrostatické napětí) p: zvyšováním p dochází k objemovým změnám

$$p = \frac{I_1}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$

Deviátorové napětí q: vypovídá o smykovém namáhání

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$$

Za předpokladu osově symetrické napjatosti (např. v triaxiálním přístroji, kde $\sigma_2 = \sigma_3$) platí:

$$q = |\sigma_1 - \sigma_3|$$

Stav napětí v daném bodě tělesa je určen Mohrovou kružnicí (O.Mohr, 1882):

Christian Otto Mohr (Wikipedia)

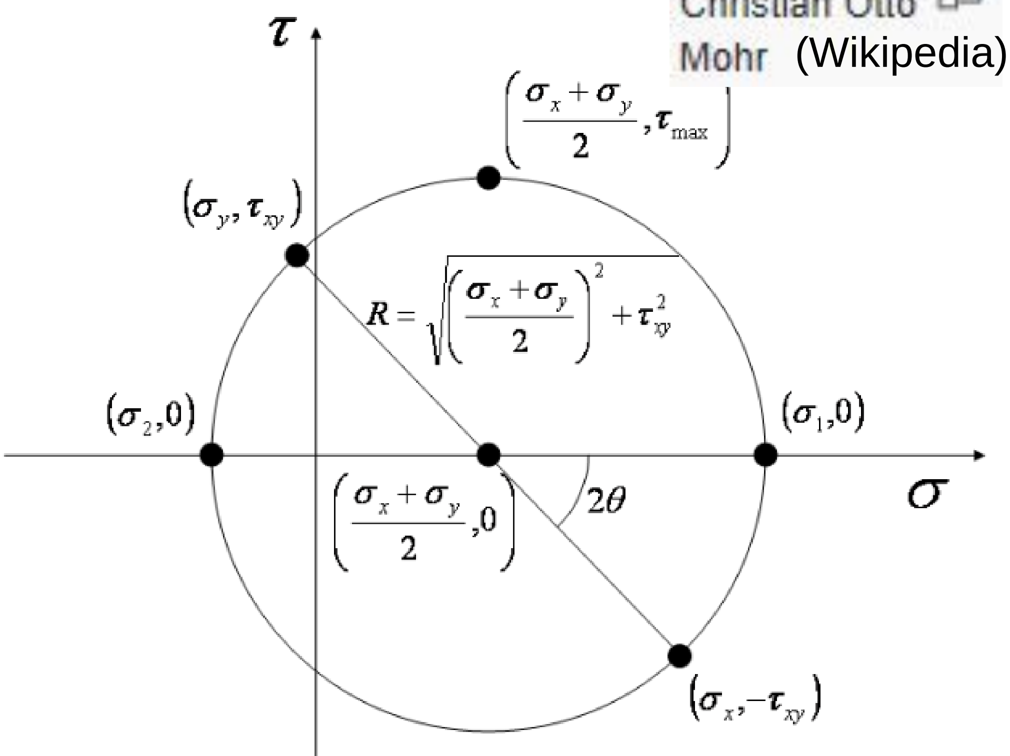
$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2$$

Střed Mohrovy kružnice:

$$S = \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2};0\right)$$

Poloměr Mohrovy kružnice:

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$



Hodnoty hlavních napětí:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

Směry hlavních napětí:

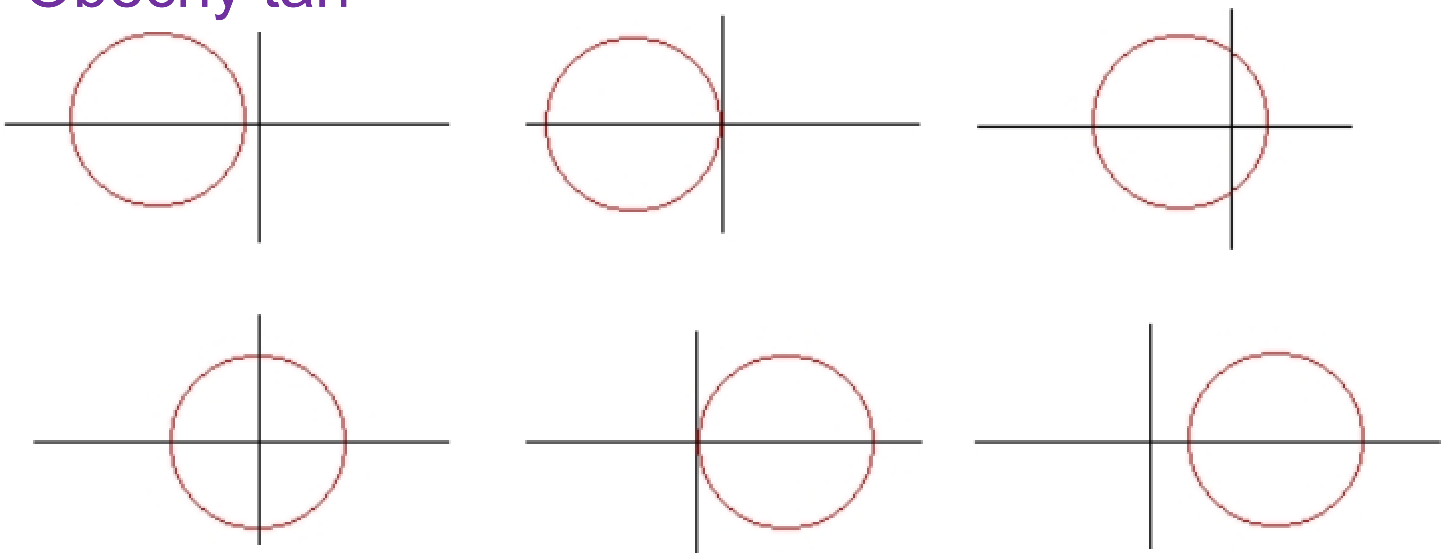
$$tg\,2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Mohrovy kružnice odpovídající specifickým stavům napjatosti

Obecný tah

Jednoosý tah

Kombinace tah+tlak



Čistý smyk

Jednoosý tlak

Obecný tlak

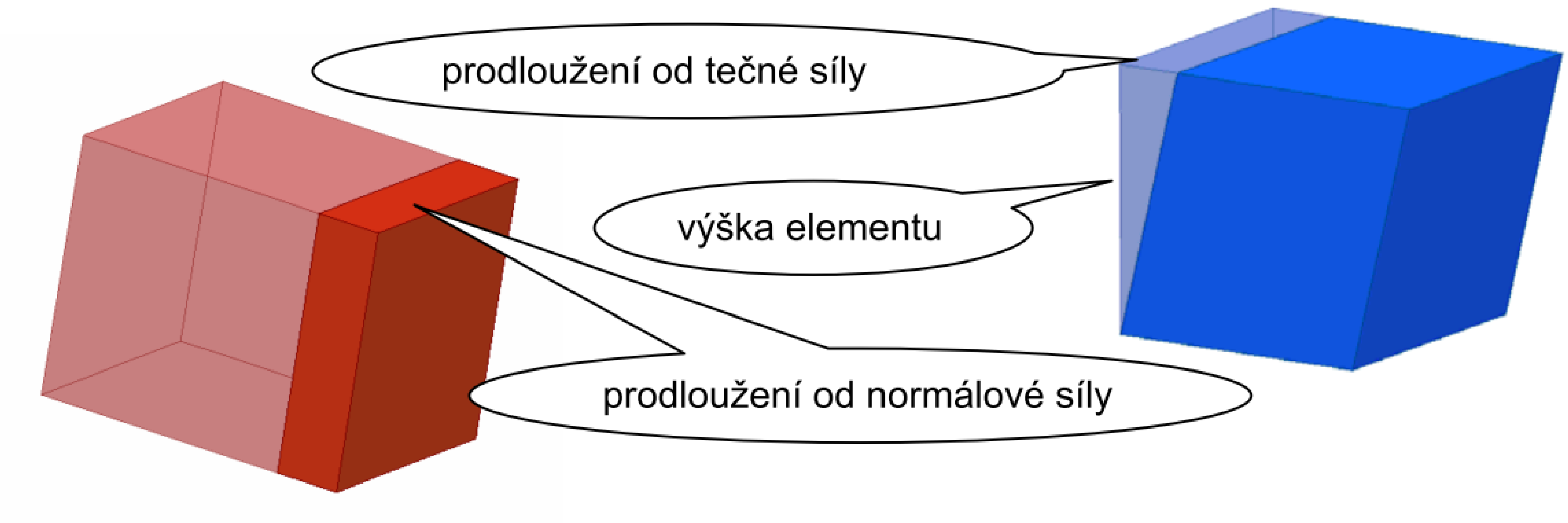
Deformace tělesa

Prostorový stav deformace je obecně definován 9 složkami deformace – třemi složkami poměrného přetvoření ε_x, ε_y, ε_z a šesti složkami zkosení (úhlových deformací) γ_{xy} , γ_{xz}, γ_{yx}, γ_{yz}, γ_{zx}, γ_{zy}.

Tenzor přetvoření

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Přetvoření tělesa se skládá ze změny objemu a ze změny tvaru.



Změnu objemu vyjadřujeme složkami objemového tenzoru přetvoření:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_s & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_s \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_s = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$

Změnu tvaru vyjadřujeme složkami tzv. deviátoru přetvoření:

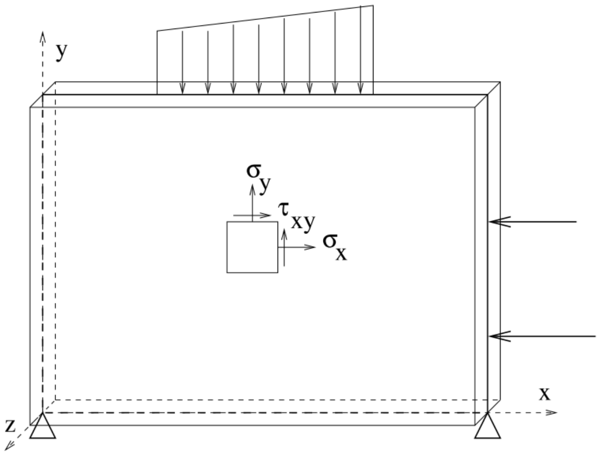
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_s & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_s & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_s \end{pmatrix}$$

Smykové napětí nezpůsobuje změnu objemu, ale pouze změnu tvaru tělesa.

Rovinná napjatost: nenulové jsou pouze ty složky napětí, které jsou rovnoběžné s určitou rovinou. tj např. $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ v případě, že uvažujeme nulová napětí ve směru osy z. Relativní deformace ve směru osy z při rovinné napjatosti ale nulová není!

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$



Rovinná napjatost (stěna) – Brožovský, Materna (2012)

Rovinná deformace: nenulové jsou pouze ty složky posunů, které vznikají v určité rovině. tj např. $\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0$.

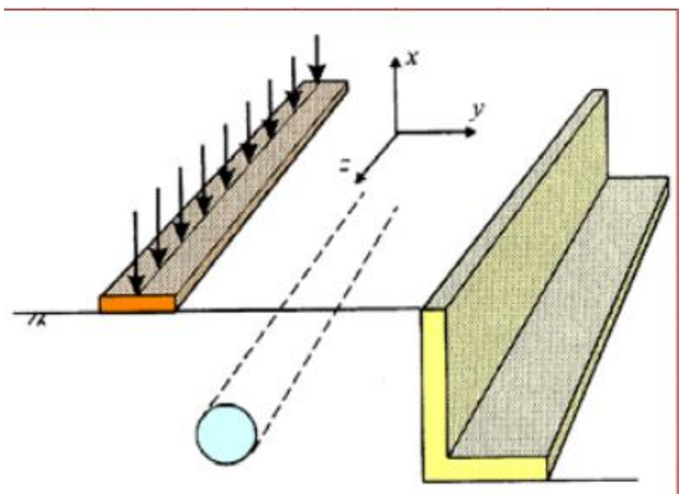
Normálové napětí σ_z při rovinné deformaci ale nulové není!

Případ rovinné deformace je nejčastější případ v geotechnických úlohách (tunely, násypy, svahy, hráze, opěrné konstrukce apod.)

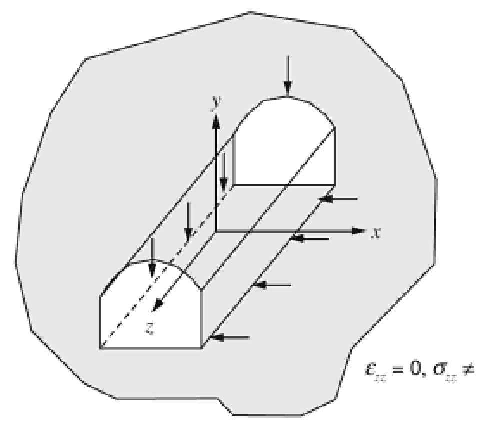
$$\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$$

$$\varepsilon_z=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0$$

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y)$$

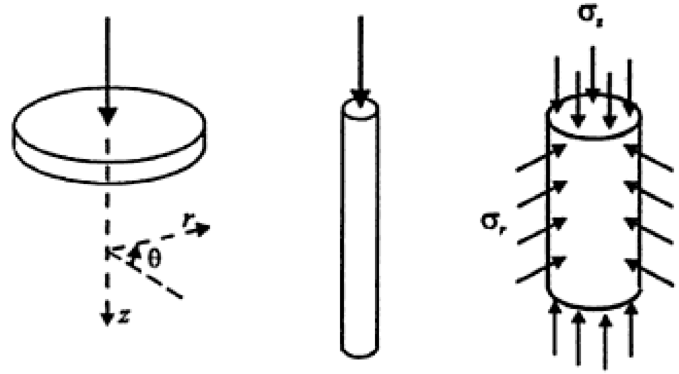


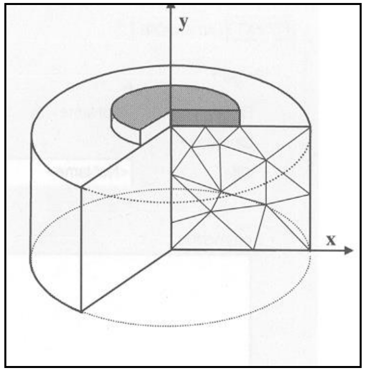
Potts, Zdravkovič (1999)



Rotačně symetrická napjatost – předpoklad tohoto stavu napjatosti lze uvažovat za objektivní, jestliže je v geotechnických úlohách splněno následující:

- Rotačně symetrická geometrie (kruhový základ, pilota, vzorek v triaxiálu apod.)
- Symetrické zatížení
- Rotačně symetrické geologické prostředí v okolí konstrukce





$$\varepsilon_z = \frac{1}{r} u_x, \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

Formulace úlohy pružnosti:

Pro těleso se známou geometrií, materiálem, zatížením a vazbami k okolí se určuje deformace a napjatost za předpokladu respektování tří základních typů rovnic teorie pružnosti.

Základní rovnice teorie pružnosti:

1) statické rovnice - vyjadřují rovnováhu sil v tělese (silové podmínky) a rovnováhu momentovou (z této momentové podmínky vyplývá redukce počtu smykových složek napětí z 9 na 6).

2) geometrické rovnice-– vyjadřují vztah mezi složkami deformace ε resp. γ a posunutím u

3) fyzikální rovnice (konstitutivní vztahy) – vyjadřují vztah mezi napětím a přetvořením

Statické rovnice rovnováhy v rovině

$$\frac{\delta\sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta y} = X_1$$

$$\frac{\delta\sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta\tau_{xy}}{\delta x} = X_2$$

kde X1, X2 jsou složky vektoru objemových sil $\vec{X}$.

Zavedeme-li vektorové značení : $\vec{\sigma} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\right)^T$

Operátorová matice $\hat{\delta}$:

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{pmatrix}$$

Maticový tvar statické rovnice rovnováhy: $\hat{\delta}\vec{\sigma} + \vec{X} = \vec{0}$

Geometrické rovnice :

$$\vec{\varepsilon} = \hat{\delta}^T \vec{u}$$ kde

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\right)^T$$

$$\vec{u} = (u, v)$$

$$\hat{\delta} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta x} & 0 & \frac{\delta}{\delta y} \\ 0 & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta x} \end{pmatrix}$$

Tedy $\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}, \gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$

Tyto rovnice však nezajišťují kontinuální přetváření tělesa, nutno uvažovat dále rovnice kompatibility.

Rovnice souvislosti přetvoření (kompatibility)

Zajišťují souvislé přetváření tělesa bez vzniku trhlin.

Ve složkách přetvoření:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Ve složkách napětí (Lévyho rovnice):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\sigma_x + \sigma_y \right) = 0$$

Fyzikální rovnice (konstitutivní rovnice)

udávají vztah mezi napětím a deformací, prvky matice D jsou v nejjednodušším případě (Hookův zákon) závislé na materiálových charakteristikách, obecně ale mohou dále záviset i na historii napětí a přetváření.

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon}$$

$$\vec{\varepsilon} = D^{-1}\vec{\sigma} = C\vec{\sigma}$$

$$\vec{\sigma} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}\right)^T$$

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}\right)^T$$

D.... matice tuhosti, D^{-1}=C .. matice poddajnosti