Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Metoda konečných prvků
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Základní charakteristika metody konečných prvků (MKP, FEM)

- nejčastěji využívaná metoda modelování kontinua
- patří mezi metody numerické(přibližné) – přesné řešení diferenciálních rovnic *u*, popisujících daný inženýrský problém, je nahrazeno řešením přibližným $\tilde{u}$
- kontinuální oblast, na níž hledáme řešení, je při aplikaci MKP rozdělena na dílčí podoblasti (tzv. konečné prvky)
- výsledkem jsou hodnoty funkce (ve standardních geotechnických úlohách se jedná o posuny) v diskrétních bodech oblasti
- metoda velmi univerzální, lze pomocí ní řešit úlohy z různých oblastí, zohledňuje tvarovou i materiálovou variabilitu oblastí

Charakteristika metody konečných prvků z hlediska metod řešení úloh mechaniky kontinua

- Metoda variační – hledá řešení úlohy na základě minimalizace funkcionálu potenciální energie (aplikace Lagrangeova variačního principu - mezi všemi funkcemi posuvů, které zachovávají spojitost tělesa a splňují geometrické okrajové podmínky, se realizují ty, které udílejí celkové potenciální energii minimální hodnotu).

- Nejčastěji formulována jako metoda deformační – primárně neznámými hodnotami úlohy jsou posuny

- Metoda numerická – převádí problém hledání spojitých funkcí na problém hledání konečného počtu neznámých parametrů, pomocí nichž se hledané funkce přibližně aproximují

HISTORIE METODY

- počátky širší inženýrské aplikace metody kolem roku 1956 ve výzkumném Ústavu aeronautické a kosmické mechaniky v Ohiu, USA – projekt Apollo
- největší rozvoj v civilním sektoru v letech 1965-1975
- široké aplikační možnosti – oblasti inženýrské (strojírenství, stavebnictví apod.), ale i oblast sociologická a ekonomická
- metoda se stále vyvíjí a zdokonaluje především z hlediska efektivity řešení komplikovaných rozsáhlých úloh
- metoda vyžaduje pro svou aplikaci výpočetní techniku, k dispozici je velké množství specializovaných softwarů pro různé aplikační oblasti

ZÁKLADNÍ PRINCIP METODY

Převedení úlohy řešení parciálních diferenciálních rovnic na řešení soustavy lineárních algebraických rovnic (aplikací Lagrangeova variačního principu)

$$K\,u = f$$

kde matice soustavy *K* <u>*(tzv. matice tuhosti)* *je pásová*</u> (nenulové prvky jsou soustředěny pouze v páse kolem hlavní diagonály)

u- vektor neznámých posunutí v uzlových bodech sítě

f- vektor známých sil (od vlastní tíhy, vnějšího přitížení apod.)

Vyjádření funkcionálu potenciální energie

Potenciální energii Π lze obecně vyjádřit jako rozdíl potenciální energie vnitřních sil Π_i (odpovídá deformační práci vnitřních sil) a potenciálu vnějšího zatížení Π_e (odpovídá deformační práci vnějších sil):

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_e$$

Nastane tedy právě ten deformační stav tělesa, pro nějž je variace $\delta\Pi$ potenciální energie soustavy nulová:

$$\delta\Pi = 0$$

LAGRANGEŮV PRINCIP VIRTUÁLNÍCH POSUNUTÍ

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon}\, d\Omega$$

virtuální práce vnitřních sil

$$\Pi_e = \int_{\Omega} \vec{u}^T \vec{X}\, d\Omega + \int_{\Gamma} \vec{u}^T \vec{p}\, d\Gamma$$

virtuální práce vnějších sil

práce od objemového zatížení **práce od povrchového zatížení na hranici Γ**

$$\vec{u}^T = (u, v, w), \quad \vec{\varepsilon}^T = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$$

$$\vec{\sigma}^T = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}), \quad \vec{X}^T = (X_x, X_y, X_z)$$

$$\vec{p}^T = (p_x, p_y, p_z)$$

X – vektor objemových sil (vlastní tíha), p- vektor povrchových sil

Určení řešení dané okrajové úlohy je tedy ekvivalentní se stanovením funkce posunů u, která minimalizuje funkcionál potenciální energie:

$$\Pi = \Pi_i - \Pi_e = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \vec{\sigma}^T \vec{\varepsilon}\, d\Omega - \int_{\Omega} \vec{u}^T \vec{X}\, d\Omega - \int_{\Gamma} \vec{u}^T \vec{p}\, d\Gamma$$

OBECNÝ POSTUP METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

1) rozdělení kontinua na určitý počet konečných podoblastí (tzv. konečných prvků) – diskretizace oblasti, prvky jsou navzájem spojeny diskrétním počtem uzlů na hranici; hodnoty hledané funkce (např. posunutí) v těchto uzlech (uzlové parametry) jsou základními neznámými úlohy

2) volba aproximační funkce definující jednoznačně stav posunutí uvnitř každého konečného prvku

OBECNÝ POSTUP METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

3) vyjádření poměrných přetvoření a posunů na prvku pomocí uzlových parametrů a příslušných bázových funkcí(metoda využívá speciálních bázových funkcí s tzv. malým nosičem- důsledkem je pásovost matice tuhosti, kdy nenulové prvky jsou soustředěny pouze v páse kolem hlavní diagonály)

4) vyjádření složek napětí na prvku pomocí uzlových parametrů

5) vyjádření funkcionálu potenciální energie prvku pomocí uzlových parametrů prvku, stanovení lokálních matic tuhosti prvků

OBECNÝ POSTUP METODY KONEČNÝCH PRVKŮ

6) sestavení celkové matice tuhosti K oblasti pomocí lokálních matic tuhosti prvků, sestavení výsledné soustavy rovnic

7) řešení výsledné soustavy rovnic pro neznámé uzlové parametry(např. posuny) a vektor známých sil f (síly od vlastní tíhy, vnějšího přitížení apod.)

$$K \vec{u} = \vec{f}$$

8) stanovení napětí na základě stanovených posunutí

diskretizace oblasti ⟶ analýza prvku ⟶ analýza celé oblasti

Značení:

Ω ….. oblast, na níž hledáme řešení úlohy (např. řez svahovým tělesem)

u ….. přesné řešení uvažované diferenciální rovnice

$u^{(n)}$ … přibližné (numerické)řešení úlohy

Toto přibližné řešení uvažujeme ve tvaru řady:

$$u^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} u_k N_k$$

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ –*<u>neznámé konstanty</u>* (fakticky se jedná o posuny v uzlových bodech)

$N_1, N_2, \ldots, N_n$ – posloupnost tzv. <u>bázových funkcí (známé)</u>

Cílem je, aby se toto přibližné numerické řešení úlohy co nejlépe přibližovalo skutečnému řešení úlohy, tj.

$$u^{(n)} \cong u$$

Pro splnění této podmínky je nutno vhodně stanovit neznámé koeficienty u_i, i=1,…,n, které určují přibližné řešení.
Koeficienty u_i volíme tak, aby funkce $u^{(n)}$ minimalizovala funkcionál potenciální energie Π (využití Lagrangeova variačního principu).

Tedy hledáme takové koeficienty u_i*, aby minimalizovaly Π

$$\Pi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i^{\,*} N_i\right) = \min \Pi\left(\sum_{i=1}^{n} u_i N_i\right)$$

Z podmínky pro extrém plyne:

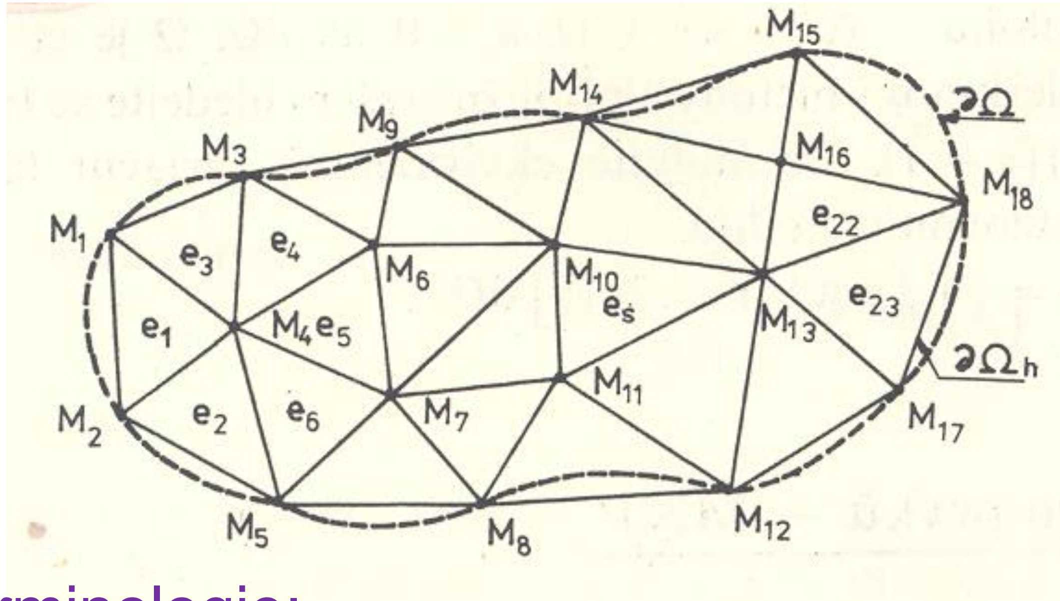
$$\frac{\delta\Pi}{\delta u_1} = 0 \qquad \frac{\delta\Pi}{\delta u_2} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \frac{\delta\Pi}{\delta u_n} = 0$$

Dostáváme tedy soustavu n algebraických rovnic pro neznámé koeficienty u_i,= u_i*, i=1,…,n (posuny v uzlových bodech).

Jedná se tedy o variační metodu (hledáme minimum funkcionálu potenciální energie).

Bázové funkce jsou speciálně voleny tak, aby byla matice vzniklé soustavy rovnic pásová. Pak je totiž možno využít efektivní algoritmy pro řešení velkých soustav rovnic s pásovou maticí a nezanedbatelné jsou také menší nároky na kapacitu disku a paměti (metoda konečných prvků vzhledem k požadavku na řešení rozsáhlých soustav algebraických rovnic vyžaduje počítačové zpracování).

? jak vypadají a jak se konstruují takové bázové funkce v případě rovinné úlohy



Základní terminologie:

- M_i …. *uzly sítě*
- trojúhelníky … *konečné prvky*
- systém konečných prvků … *síť*

nejčastěji používané konečné prvky jsou trojúhelníky (odpovídají lineární aproximaci funkce posunů na trojúhelníku)

- systém trojúhelníkových konečných prvků … *triangulace*

Zásady triangulace

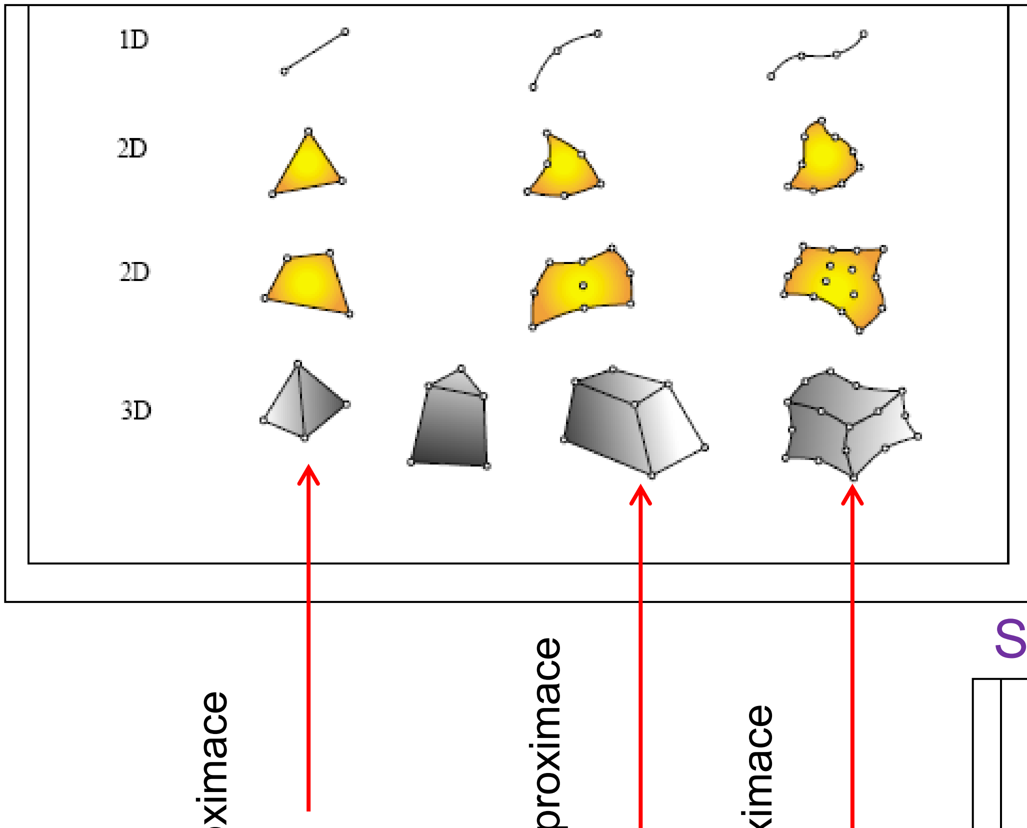
1) trojúhelníky se nesmějí překrývat, mají společný pouze vrchol nebo celou stranu

2) úhly v trojúhelnících nesmí být příliš ostré

3) v místech očekávaných velkých deformačních a napěťových změn (pata svahu, okolí výrubu tunelu apod.) by měla být síť hustší

Čísla přiřazená jednotlivým uzlům (tj. hodnoty přibližného řešení) se nazývají *uzlové parametry U_i*.

Tvary nejčastěji používaných konečných prvků pro různé dimenze úlohy

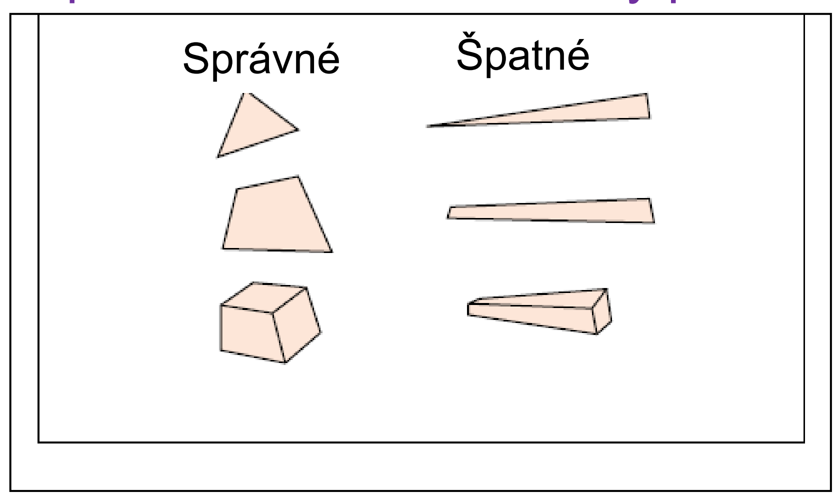


Lineární aproximace na prvku

Kvadratická aproximace na prvku

Kubická aproximace na prvku

Správné a nevhodné tvary prvků



Modelování v geotechnice – Metoda konečných prvků

Nejčastěji používaný prvek v rovině : trojúhelník

Nejčastěji využívané trojúhelníkové prvky:

- Uzlové body ve vrcholech trojúhelníka (nejjednodušší prvek v rovině) (3 uzlový prvek) – aproximace posunů na prvku je lineární, není příliš přesný, nevystihuje zejména lokální extrémy deformací ani napětí, ve většině komerčních softwarů se nevyužívá

- Uzlové body ve vrcholech trojúhelníka a ve středech stran (6-ti uzlový prvek) – aproximace funkce posunů na prvku je polynomem 2. řádu, dostatečná přesnost v případě deformační analýzy, pro stabilitní analýzu nepřesný

- Uzlové body ve vrcholech trojúhelníka, ve středech stran i uvnitř trojúhelníka (15-ti uzlový prvek) – aproximace funkce posunů na prvku polynomem 3. řádu, doporučuje se především v případě napěťové analýzy (stabilitní úlohy, vyhodnocení čerpání smykové pevnosti apod.)

Základní princip metody –ilustrace na trojúhelníkovém 3-uzlovém prvku pro funkci posunů *u* v jednom směru (analogicky i pro druhý směr *v*- vertikální posuny)

Na trojúhelníku Δe_s s uzly i,j,k:

$$M_i^{(s)} = \left(x_i^{(s)}, y_i^{(s)}\right) \rightarrow U_i^{(s)}$$
$$M_j^{(s)} = \left(x_j^{(s)}, y_j^{(s)}\right) \rightarrow U_j^{(s)}$$
$$M_k^{(s)} = \left(x_k^{(s)}, y_k^{(s)}\right) \rightarrow U_k^{(s)}$$

Lineární interpolační funkce posunů u (x,y) na trojúhelníku e_s (je jednoznačně určena uzlovými parametry $U_i^{(s)}$,$U_j^{(s)}$,$U_k^{(s)}$):

$$u(x,y)=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y$$

Musí tedy platit:

$$u\left(x_i^{(s)},y_i^{(s)}\right)=U_i^{(s)}$$
$$u\left(x_j^{(s)},y_j^{(s)}\right)=U_j^{(s)}$$
$$u\left(x_k^{(s)},y_k^{(s)}\right)=U_k^{(s)}$$

Dostáváme soustavu 3 lineárních algebraických rovnic (odpovídá lineární aproximaci na jednom trojúhelníku):

$$\alpha_1 + \alpha_2 x_i^{(s)} + \alpha_3 y_i^{(s)} = U_i^{(s)}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_j^{(s)} + \alpha_3 y_j^{(s)} = U_j^{(s)}$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 x_k^{(s)} + \alpha_3 y_k^{(s)} = U_k^{(s)}$$

Cramerovo pravidlo:

$$\alpha_1^{(s)} = \frac{1}{\det S^{(s)}}\left[\left(x_j^{(s)}y_k^{(s)} - x_k^{(s)}y_j^{(s)}\right)U_i^{(s)} + \left(x_k^{(s)}y_i^{(s)} - x_i^{(s)}y_k^{(s)}\right)U_j^{(s)} + \left(x_i^{(s)}y_j^{(s)} - x_j^{(s)}y_i^{(s)}\right)U_k^{(s)}\right]$$

$$\alpha_2^{(s)} = \frac{1}{\det S^{(s)}}\left[\left(y_j^{(s)} - y_k^{(s)}\right)U_i^{(s)} + \left(y_k^{(s)} - y_i^{(s)}\right)U_j^{(s)} + \left(y_i^{(s)} - y_j^{(s)}\right)U_k^{(s)}\right]$$

$$\alpha_3^{(s)} = \frac{1}{\det S^{(s)}}\left[\left(x_k^{(s)} - x_j^{(s)}\right)U_i^{(s)} + \left(x_i^{(s)} - x_k^{(s)}\right)U_j^{(s)} + \left(x_j^{(s)} - x_i^{(s)}\right)U_k^{(s)}\right]$$

$$S^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & x_i^{(s)} & y_i^{(s)} \\ 1 & x_j^{(s)} & y_j^{(s)} \\ 1 & x_k^{(s)} & y_k^{(s)} \end{pmatrix}$$

Označíme:

$$a_i^{(s)} = x_j^{(s)} y_k^{(s)} - x_k^{(s)} y_j^{(s)}$$

$$a_j^{(s)} = x_k^{(s)} y_i^{(s)} - x_i^{(s)} y_k^{(s)}$$

$$a_k^{(s)} = x_i^{(s)} y_j^{(s)} - x_j^{(s)} y_i^{(s)}$$

$$b_i^{(s)} = y_j^{(s)} - y_k^{(s)}$$

$$b_j^{(s)} = y_k^{(s)} - y_i^{(s)}$$

$$b_k^{(s)} = y_i^{(s)} - y_j^{(s)}$$

$$c_i^{(s)} = x_k^{(s)} - x_j^{(s)}$$

$$c_j^{(s)} = x_i^{(s)} - x_k^{(s)}$$

$$c_k^{(s)} = x_j^{(s)} - x_i^{(s)}$$

Bázové funkce příslušející trojúhelníku es:

$$N_i^{(s)}(x,y)=\frac{1}{\det S^{(s)}}\left(a_i^{(s)}+b_i^{(s)}x+c_i^{(s)}y\right)$$

$$N_j^{(s)}(x,y)=\frac{1}{\det S^{(s)}}\left(a_j^{(s)}+b_j^{(s)}x+c_j^{(s)}y\right)$$

$$N_k^{(s)}(x,y)=\frac{1}{\det S^{(s)}}\left(a_k^{(s)}+b_k^{(s)}x+c_k^{(s)}y\right)$$

Interpolační polynom posunů na trojúhelníku e_s lze pak s využitím tohoto značení zapsat ve tvaru:

$$u^{(s)}(x,y) = N_i^{(s)}(x,y)U_i^{(s)} + N_j^{(s)}(x,y)U_j^{(s)} + N_k^{(s)}(x,y)U_k^{(s)}$$

$U_i^{(s)}, U_j^{(s)}, U_k^{(s)}$- horizontální posuny ve vrcholech trojúhelníka

$N_i^{(s)}, N_j^{(s)}, N_k^{(s)}$ – bázové funkce příslušející vrcholům trojúhelníka

analogicky je možno získat vyjádření dalších uzlových parametrů (např. posunů v dalších směru)

Vlastnosti bázových funkcí N na trojúhelníku:

1) $N_i^{(s)}(x, y) + N_j^{(s)}(x, y) + N_k^{(s)}(x, y) = 1$

2) $N_i^{(s)}\left(M_i^{(s)}\right) = 1$

$N_j^{(s)}\left(M_j^{(s)}\right) = 1$

$N_k^{(s)}\left(M_k^{(s)}\right) = 1$

3) $N_i^{(s)}\left(M_j^{(s)}\right) = N_i^{(s)}\left(M_k^{(s)}\right) = 0$

$N_j^{(s)}\left(M_i^{(s)}\right) = N_j^{(s)}\left(M_k^{(s)}\right) = 0$

$N_k^{(s)}\left(M_i^{(s)}\right) = N_k^{(s)}\left(M_j^{(s)}\right) = 0$

Vlastnosti globálních bázových funkcí na celé oblasti

Každému uzlu triangulace Mr tedy přísluší bázová funkce N_r, která má následující vlastnosti:

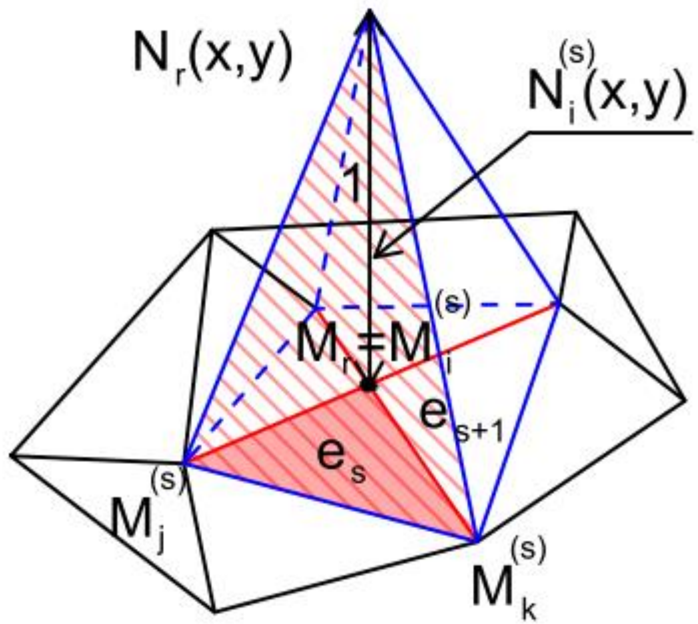
1) Je nenulová pouze na těch trojúhelnících, jejichž společným vrcholem je uzel Mr, na ostatních trojúhelnících je nulová (důvod pásové matice soustavy)

2) Nabývá v uzlu Mr hodnoty 1, tj. $N_r(Mr)=1$

3) Nad každým trojúhelníkem, jehož 1 vrchol je Mr,je lineárním polynomem

Geometrická představa globálních bázových funkcí:

Bázové funkce jsou jehlany s vrcholem ve výšce 1 nad uzlem Mr, r=1,…,n. Jejich podstavu tvoří sjednocení těch trojúhelníků, které mají společný vrchol Mr (jedná se o bázové funkce s tzv. malým nosičem).



Hledané přibližné řešení úlohy:

$$u^{(n)}(x,y) = U_1 N_1(x,y) + U_2 N_2(x,y) + \ldots + U_n N_n(x,y)$$

N_r, r=1,…,n – bázové funkce příslušející jednotlivým uzlům v oblasti

n- počet uzlů

Neznámé globální parametry Ui (hodnoty posunů v uzlových bodech) se stanoví z podmínek minimalizace funkcionálu potenciální energie.

Na základě vyjádření aproximovaných posunů na prvku, vyjádření odpovídajících přetvoření a napětí a aplikací Lagrangeova variačního principu dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$K\ u = f$$

K –matice tuhosti (symetrická, pásová)

u – vektor neznámých uzlových parametrů (např. posuny v uzlech)

f- vektor známých sil

Matice tuhosti K je pásová (vyplývá z vlastností bázových funkcí), šířka pásu závisí na číslování uzlů.

Softwarové systémy pracující na základě MKP pro aplikace v geotechnice a podzemním stavitelství dostupné na katedře Geotechniky a podzemního stavitelství

PLAXIS 2D	firma Plaxis, Holandsko, rovinné modelování
PLAXIS 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování
TUNNEL 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování úloh především z oblasti tunelování
FOUNDATION 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování úloh z oblasti zakládání
CESAR	firma Itech, Francie, rovinné i prostorové modelování geotechnických úloh
GEO MKP	firma Fine, ČR, rovinné úlohy

Modelování v geotechnice – Metoda konečných prvků

GEO MKP	firma Fine, ČR, rovinné úlohy
MIDAS GTS	firma TNO Diana, Holandsko, rovinné i prostorové modely
PHASE	firma Rocscience, Kanada, rovinné úlohy, existuje i prostorová verze
ATENA	firma Červenka, ČR, řešení konstrukcí
ANSYS	velmi univerzální programový systém, nejen pro geotechniku

a další specializované softwary …

Chybové aspekty modelů založených na MKP

- Chyby formulační – zadání geometrie, volba konstitutivních vztahů, materiálových vlastností, okrajových podmínek, volba typu analýzy (lineární, nelineární, odvodněné, resp. neodvodněné podmínky atd.),…

- Chyby diskretizace – vyplývají z generace sítě a volby typu prvků

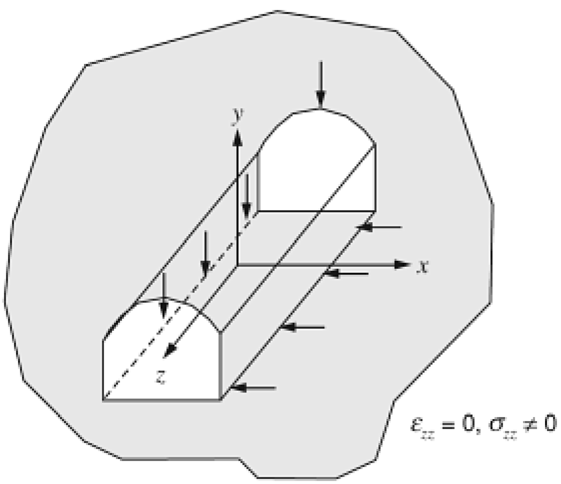
- Chyby numerické – integrační chyby , chyby zaokrouhlovací, chyby iterační,…

Formulační chyby numerických modelů – volba dimenze modelu

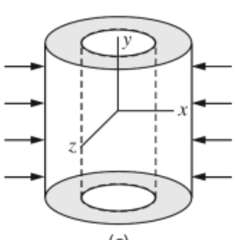
Volba dimenze modelu: 2D x 3D,

2D model – úlohy, v nichž jsou splněny podmínky rovinné deformace (např. liniová díla (tunely apod.) nebo rovinné napjatosti (např. tenké desky) nebo stav rotační symetrie – kruhové základy, piloty apod. (! nejen symetrická konstrukce, ale i podloží, včetně hladiny podzemní vody …)

Rovinná deformace:



Rotační symetrie:



(a)

3D model – nejsou splněny podmínky pro 2D model např. stav v blízkosti čelby a na čelbě tunelu (i když lze částečně simulovat ve 2D zadáním koeficientu vlivu čelby)

Formulační chyby numerických modelů – volba charakteru prostředí

Prostředí: homogenní x nehomogenní x kvazihomogenní

izotropní x transversálně izotropní x anizotropní

drénované x nedrénované

kontinuální x diskontinuitní

Formulační chyby numerických modelů – volba charakteru prostředí

Drénované x nedrénované prostředí:

- Drénované – při přitěžovaní resp. odlehčování nevznikají v prostředí změny pórových tlaků (pomalé zatěžování, velmi propustné prostředí (např. štěrky), řešení dlouhodobé stability)

- Nedrénované - při přitěžovaní resp. odlehčování vznikají v prostředí změny pórových tlaků, (rychlé zatěžování, málo propustné prostředí (např. jíly), řešení krátkodobé stability)

Formulační chyby modelů - volba konstitutivního modelu

- Pružný model (lineární, nelineární)
- Pružně ideálně plastický model (Mohr-Coulomb,…)
- Pružně plastické modely se zpevněním (Cam Clay model, …)
- Pružně plastické modely se změkčením
- Hypoplastické modely
- další pokročilé konstitutivní modely

dostupnost vstupních charakteristik x výstižnost chování zeminového prostředí

Chyby formulační – volba vhodného modelu chování liniových prvků

Nosníkové elementy (beam) – liniové prvky , které jsou namáhány ohybem, na tah-tlak i krutem (modelují např. výztužní elementy)

Tyčové prvky (bar) - liniové prvky , které jsou namáhány pouze na tlak-tah (absence rotace v uzlech) (modelují např. kotvy, svorníky)

Formulační chyby modelů – zadání materiálových charakteristik

Vyplývají z následujících základních faktorů:

- specifikum horninového prostředí, velká časová i prostorová variabilita parametrů horninového prostředí, vlastnosti materiálu vzorku x vlastnosti celého masívu
- způsobu odběru neporušených vzorků a jejich přípravy na laboratorní zkoušky
- principy přístrojů pro provedení laboratorních či polních zkoušek
- metodiky provádění a vyhodnocování zkoušek
- lidského faktoru při odběru a realizaci zkoušek

Formulační chyby modelů – zadání materiálových charakteristik

Nejistoty lze snížit především:

- kvalitním a dostatečným průzkumem, poskytujícím dostatečný počet výsledků laboratorních i polních zkoušek pro stanovení spolehlivých mater. charakteristik
- zvyšováním odborností pracovníků provádějících průzkum, lab. i polní zkoušky
- aplikací stochastických metod modelování, metod inverzní analýzy

Formulační chyby modelů – volba okrajové podmínky

Standardní okrajové podmínky statické rovnováhy: musí zabránit rotačnímu i translačnímu posunu celého modelu (v geotechnických úlohách nejčastěji podmínka tzv. tuhé vany)

Okrajové podmínky konsolidační – definují v modelu propustnost či nepropustnost dané hranice vzhledem ke konsolidačním procesům – jednostranná či dvoustranná konsolidace (např. při modelování procesu konsolidace pod násypy budovanými na zvodnělém měkkém jílovitém podloží) – volba determinuje časový průběh sedání a vývoj pórových tlaků v podloží

Okrajové podmínky omezující proudění vody

Nezadání nebo chybné zadání okrajových podmínek vede k problémům s řešitelností výsledné soustavy rovnic, matice tuhosti není regulární a není zajištěna řešitelnost výsledné soustavy rovnic.

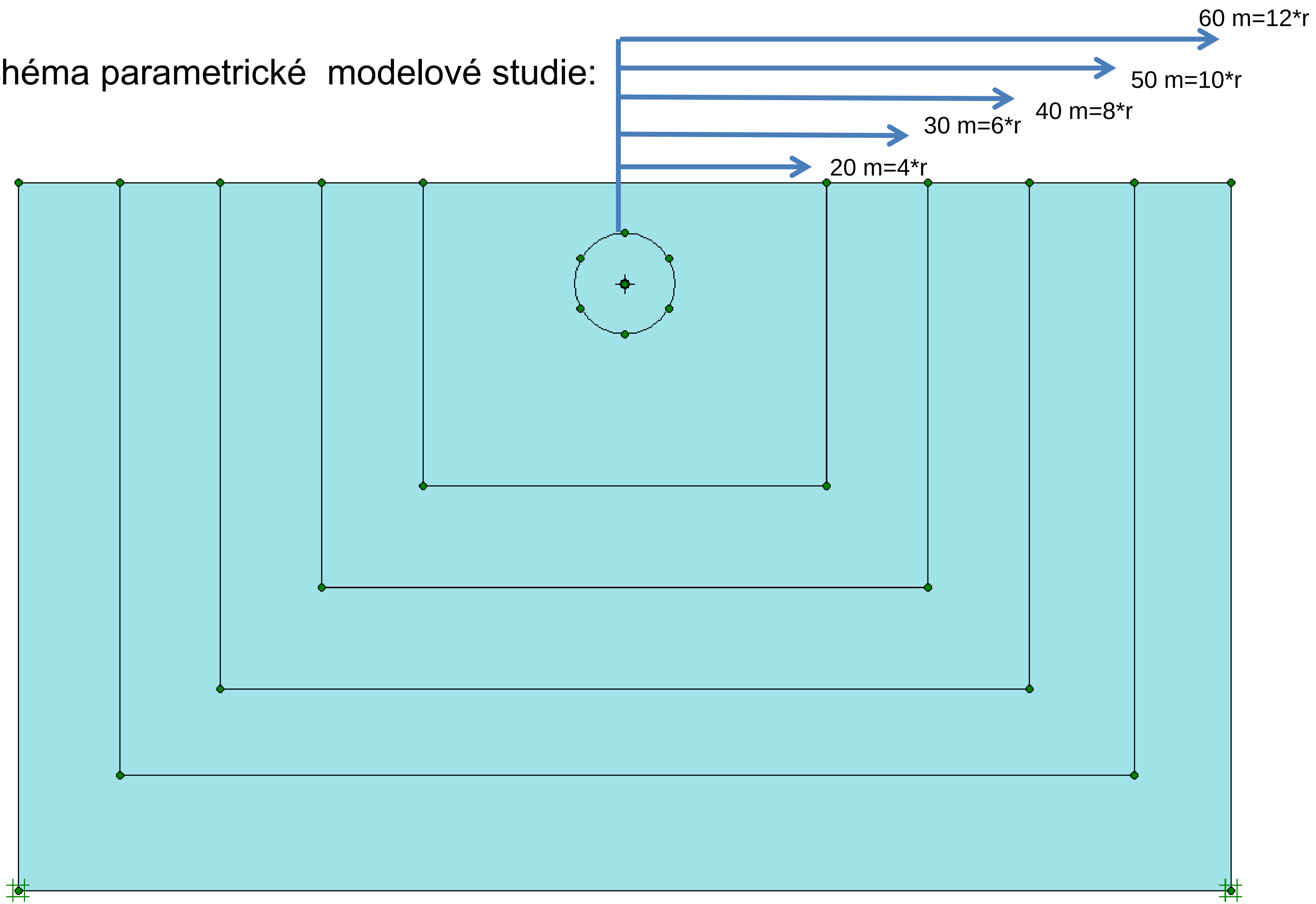
Formulační chyby modelů – volba rozsahu modelu

Rozsah modelu by měl být takový, aby okrajové podmínky zadávané na hranicích, neovlivňovaly výpočet v zájmové oblasti, tj. deformační hranice by měly být v místech, ve kterých se již nepředpokládají deformační změny.

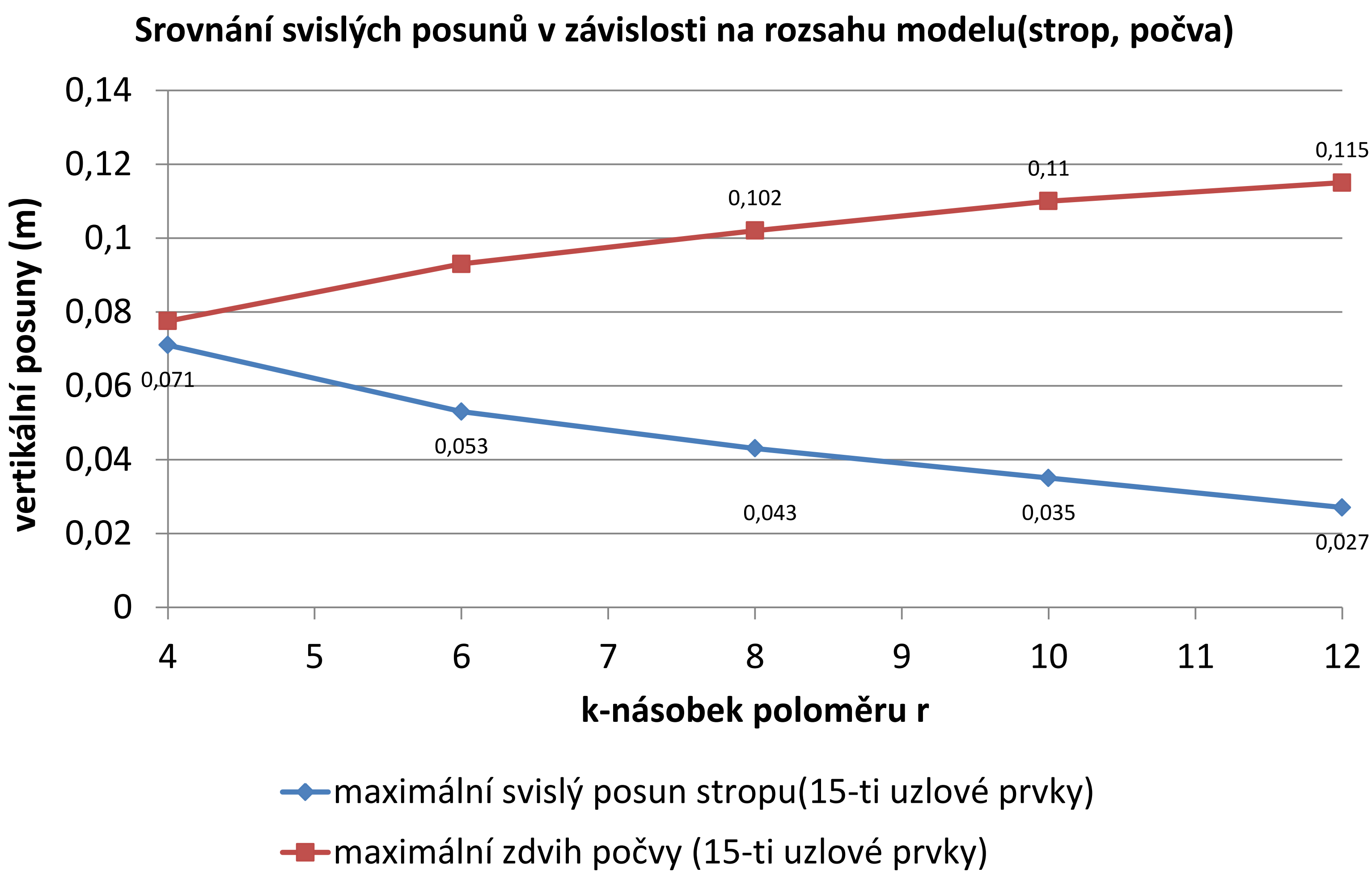
Testovací úloha vlivu velikosti modelu na výsledky řešení (Plaxis 2D):

nevyztužené dílo kruhového příčného průřezu o poloměru r= 5 m
výška nadloží: h= 5 m
Objemová tíha okolní horniny: g= 20 kN/m^3 (homogenní prostředí)
Modul pružnosti okolního prostředí: E=20 MPa
Materiálový model: lineárně pružný
Variantní rozměry modelu: vzdálenost bočních svislých hranic a spodní hranice od středu díla vždy v k-násobcích poloměru díla (k=4,6,8,10,12)

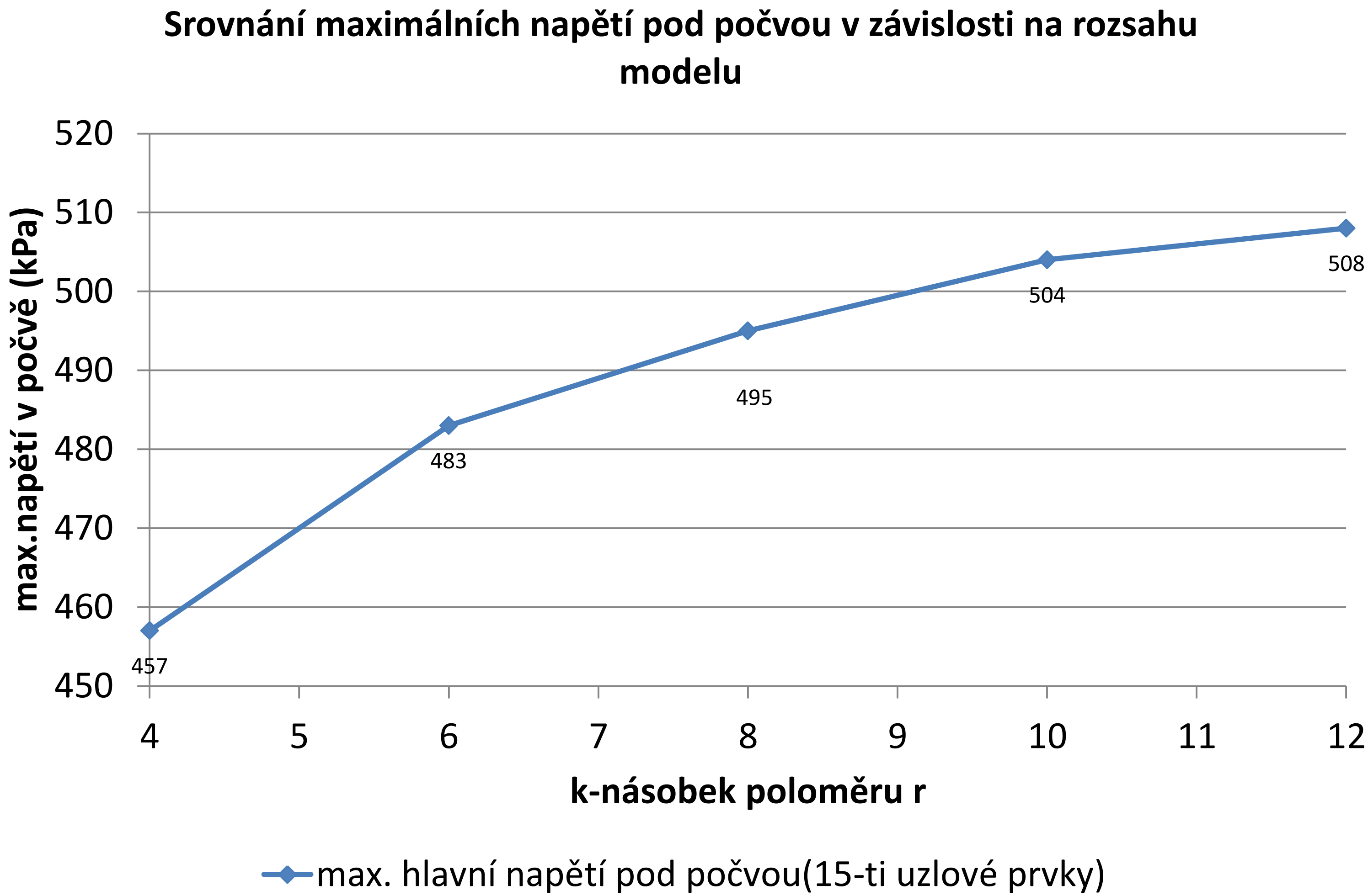
Schéma parametrické modelové studie:



Formulační chyby modelů – volba rozsahu modelu



Formulační chyby modelů – volba rozsahu modelu



Chyby diskretizační – volba typu prvku

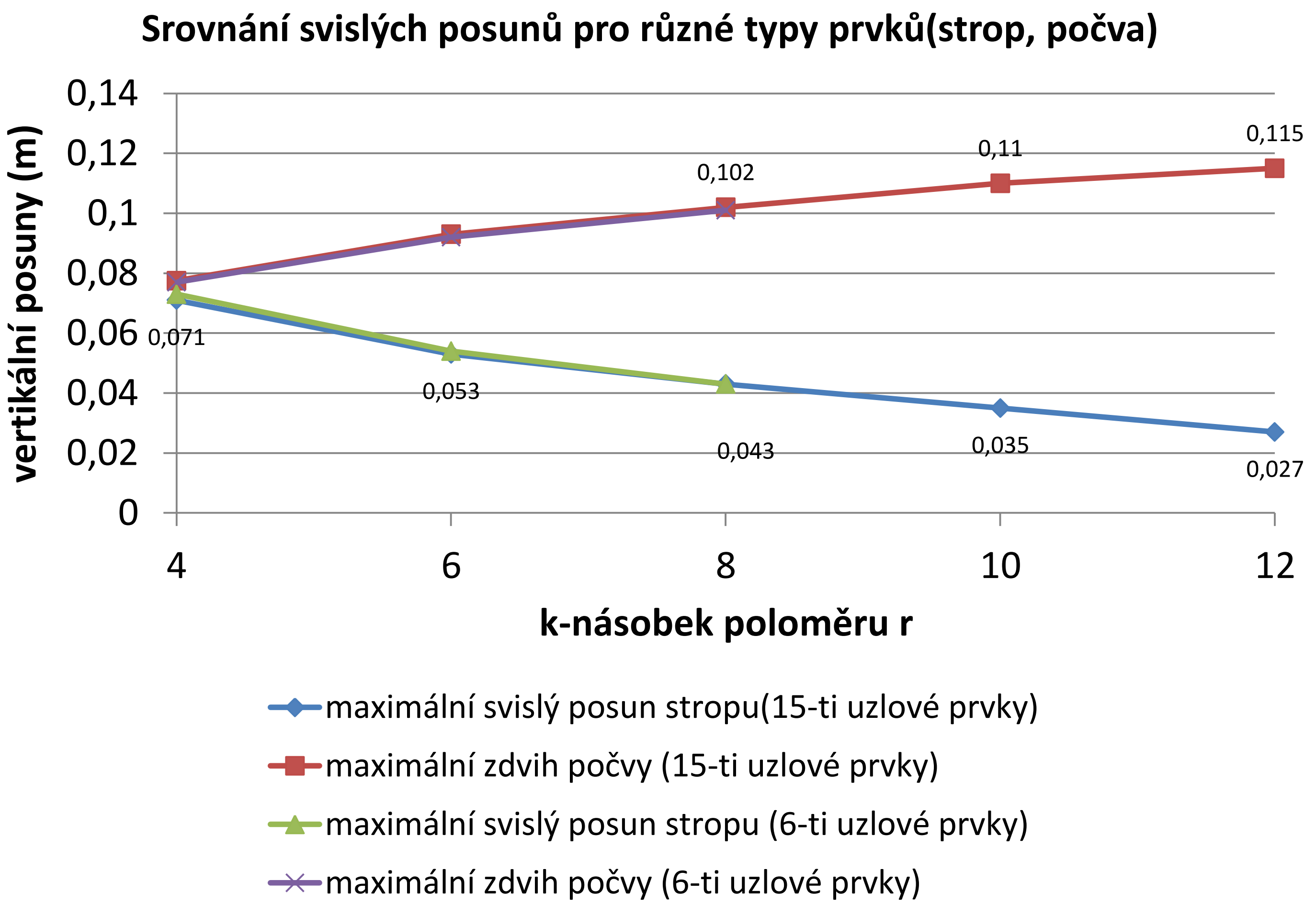
Základní faktory určující tvar aproximační funkce posunů na prvku :

- typ prvků (prutový(1D), trojúhelníkový(2D), čtyřúhelníkový(2D), čtyřstěn(3D), ….)

- počet uzlových bodů

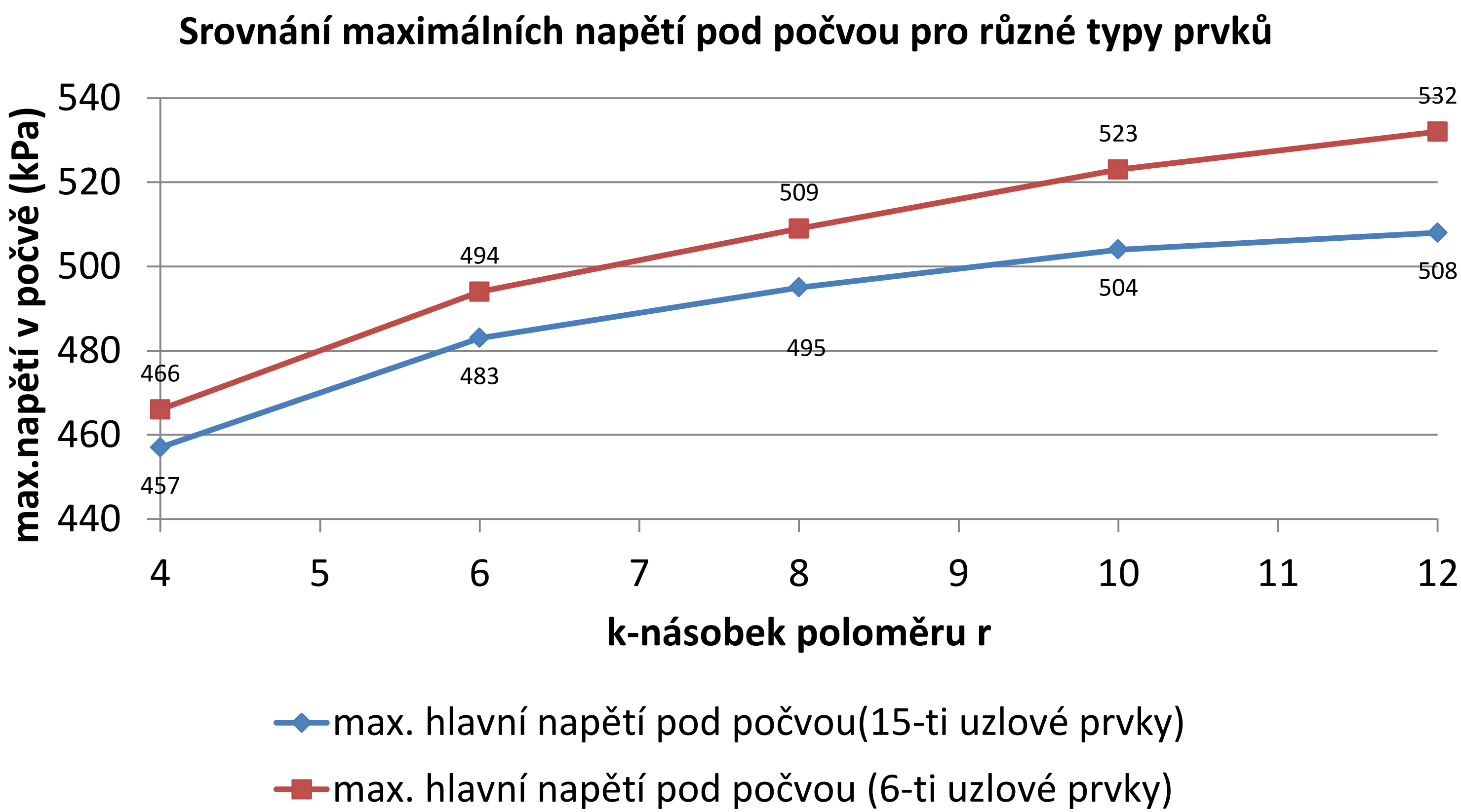
Vyšší počet uzlových bodů umožňuje zpřesnit řešení, avšak představuje zvýšení dimenze soustavy rovnic, vyšší nároky na výpočetní čas, kapacitu operační paměti i disku, …

Chyby diskretizační – volba typu prvku



Posuny pro oba typy trojúhelníkových prvků (6-ti i 15-ti uzlové) jsou posuny Identické.

Chyby diskretizační – volba typu prvku



Maximální napětí kolem díla (v počvě) je pro různé prvky rozdílné

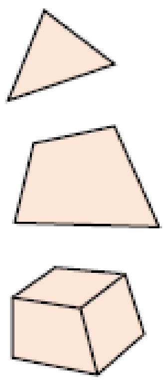
Chyby diskretizační – kvalita sítě

Základní chybové faktory sítě

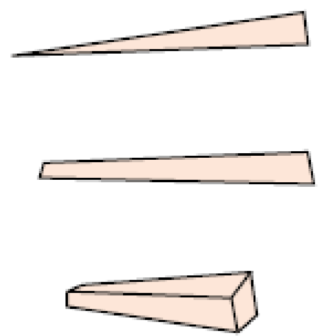
- Málo hustá síť, hustší síť je nutno zvolit v místech s vyšším gradientem změny(kolem vyraženého tunelu, v okolí paty svahu, v okolí vyhloubené jámy …) – zachycení lokálních extrémů
- Velké zkosení prvků (ostré úhly)
- Příliš velký poměr mezi největším a nejmenším rozměrem prvků (tzv. aspect ratio-AR)
- Příliš velké rozdíly ve velikosti sousedních prvků – optimální je postupná změna velikosti prvků (do 20 %)

Chyby diskretizační – kvalita sítě

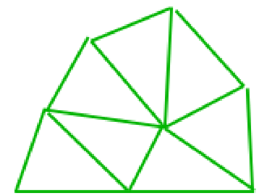
Správné tvary
AR = cca 1



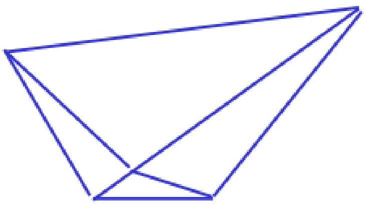
Nevhodné tvary
AR vysoké, ostré úhly



Velikosti sousedních prvků



Příliš velký rozdíl



Špatná kvalita sítě způsobuje nepřesné řešení, numerické problémy, výsledná soustava rovnic je tzv. špatně podmíněná – tj. malá změna ve vstupních datech znamená velkou změnu v řešení.

Konvergenci úlohy může rovněž narušit kombinace různých prvků v jedné úloze kdy při spojení mají prvky na společné hraně odlišný počet uzlů.

Chyby diskretizační – volba hustoty sítě

vyšší hustota sítě + volba prvků s vyšším stupněm aproximace posunů

⇓

větší počet neznámých ve výsledné soustavě rovnic

Odhad délky výpočtu:

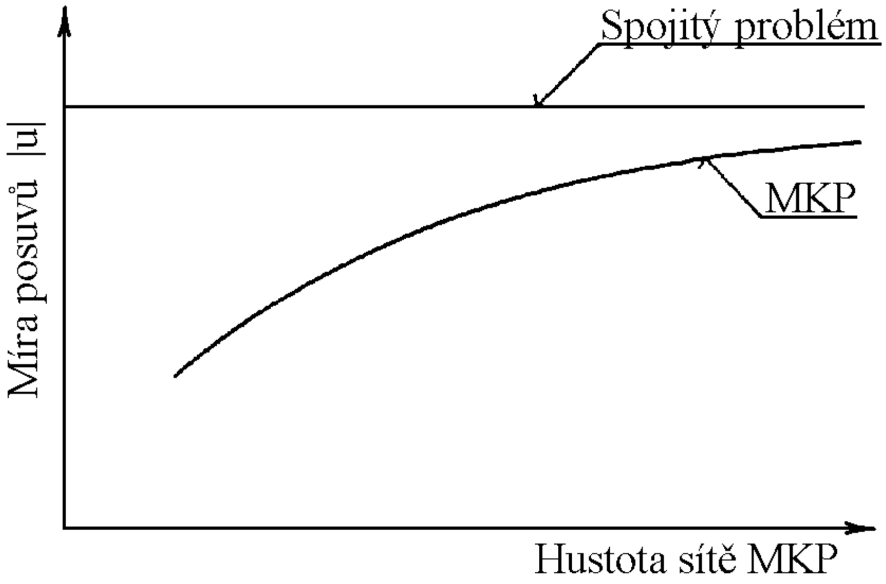
délka výpočtu= cca (počet neznámých) x (šířka pásu matice tuhosti)^2

Chyby numerické

- Chyby zaokrouhlovací – zejména při aplikaci Gaussovy eliminační metody pro řešení soustavy rovnic dochází k jejich akumulaci
- Chyby integrace – chyby spojené s numerickou integrací např. pro stanovení matice tuhosti s využitím určitého počtu Gaussových integračních bodů, čím vyšší počet integračních bodů, tím vyšší přesnost
- Chyby iteračních metod – při nevhodné volbě počáteční aproximace, iteračního kroku, nastavení přesnosti výpočtu nemusí být splněna podmínka konvergence metody

Chyby, k nimž dochází při řešení výsledné soustavy rovnic, často souvisí se špatnou kvalitou sítě popř. špatně zadanými okrajovými podmínkami modelu.

Obecné srovnání řešení spojitého problému a odpovídající úlohy MKP



- posuny stanovené MKP jsou obecně nižší ve srovnání se spojitým řešením
- numerický model je obecně tužší než model spojitý
- se vzrůstající hustotou sítě se zvyšuje poddajnost modelu