



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika  
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

# Metoda konečných prvků – Úvod

(výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

## Metoda konečných prvků (Finite element method)

zkratka: (MKP nebo anglicky FEM)

Považována za nejefektivnější numerickou metodu pro modelování problémů matematické fyziky – tj. úloh popsanych v závislosti na typu řešené úlohy diferenciálními nebo integrálními rovnicemi různých typů

## Základní charakteristika metody konečných prvků (MKP, FEM)

- patří mezi metody numerické (přibližné) – přesné řešení diferenciálních rovnic  $u$ , popisujících daný inženýrský problém, je nahrazeno řešením přibližným  $u \cong \tilde{u}$
- metoda variační, vychází z podmínky minimalizace funkcionálu potenciální energie
- metoda převádí původní úlohu řešení diferenciálních rovnic, popisujících danou úlohu, na řešení soustavy algebraických rovnic (jednodušší úloha v porovnání s úlohou původní)

# Metoda konečných prvků – Úvod

- kontinuální oblast, na níž hledáme řešení, je při aplikaci MKP rozdělena na dílčí podoblasti (tzv. konečné prvky), které spolu komunikují přes tzv. uzlové body – zaručují spojitost řešení (metoda modelování kontinua)
- výsledkem řešení jsou primárně hodnoty hledané funkce (např. posuny) v diskrétních bodech oblasti
- metoda konečných prvků využívá speciální volbu bázových funkcí, které předurčují pásovost matice tuhosti výsledné soustavy rovnic
- metoda velmi univerzální, lze pomocí ní řešit úlohy z různých oblastí, zohledňuje tvarovou i materiálovou variabilitu oblastí

## Stručná historie vývoje metody konečných prvků

- 1941 – A.Hrennikoff (1896-1984) -rusko-kanadský stavební inženýr
- 1942 – základní teoretickou myšlenku metody (řešení difer.rovnic na dílčích podoblastech publikuje prof. R.Courant (Německo) v časopise Bulletin of American Mathematical Society



(1888- 1972)

(zdroj:wikipedia)

- počátky širší inženýrské aplikace metody kolem roku 1956 ve výzkumném Ústavu aeronautické a kosmické mechaniky v Ohio, USA – projekt Apollo
- principy metody zpočátku utajovány, první konference v Ohio (1965 a 1968) uváděly jen strohé informace
- vznikla v inženýrské praxi, teprve následně dokázána konvergence metody matematiky v 60-letech 20. století – nestandardní postup ve srovnání s dalšími aplikačními metodami

- největší rozvoj v civilním sektoru v letech 1965-1975
- široké aplikační možnosti – oblasti inženýrské (strojírenství, stavebnictví apod.), ale i oblast sociologická a ekonomická
- metoda se stále vyvíjí a zdokonaluje především z hlediska efektivity řešení komplikovaných rozsáhlých úloh
- metoda vyžaduje pro svou aplikaci výpočetní techniku, k dispozici je velké množství specializovaných softwarů pro různé aplikační oblasti

## APLIKAČNÍ OBLASTI MKP

### Aplikační oblast

### Hledané parametry

mechanika kontinua

posuny

úlohy vedení tepla

teploty

proudění

rychlosti

elektrostatika

elektrický potenciál

magnetostatika

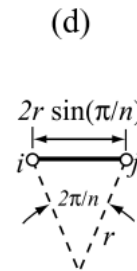
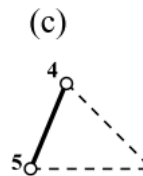
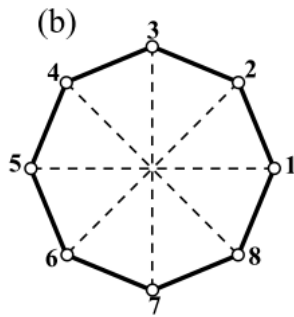
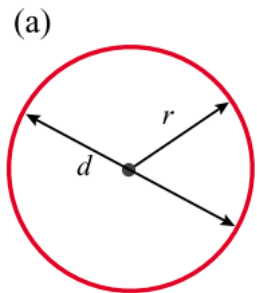
magnetický potenciál

..... a další



## Ilustrace základního konceptu metody

Ilustrace základního konceptu dělení kontinuální oblasti na dílčí prvky – výpočet čísla  $\pi$  pomocí rozdělení kontinuální oblasti (kruh) na jednotlivé prvky (trojúhelníky)



- a) kontinuální oblast
- b) rozdělení na dílčí podoblasti
- c) vnější hranice elementu určena body 4 a 5
- d) jednotlivý element (délka vnější hranice  $2r \sin(\pi/n)$ ) při rozdělení na  $n$  elementů

Vypočtená hodnoty čísla  $\pi$  v závislosti na počtu prvků  $n$

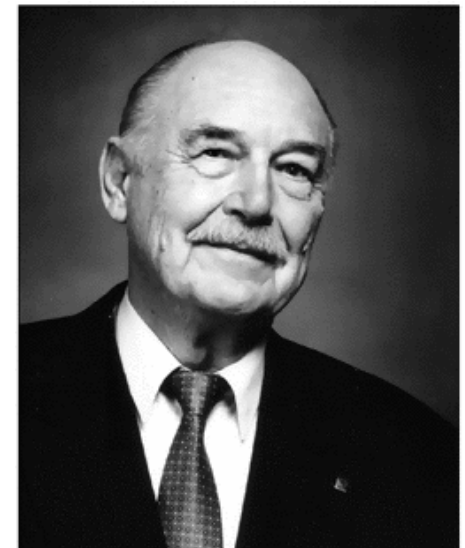
$n$	$\pi_n = n \sin(\pi/n)$
1	0.0000000000000000
2	2.0000000000000000
4	2.828427124746190
8	3.061467458920718
16	3.121445152258052
32	3.136548490545939
64	3.140331156954753
128	3.141277250932773
256	3.141513801144301

## Základní zahraniční publikace zabývající se aplikací MKP v oblasti geotechnického inženýrství

- Zienkiewicz, O.C. *The finite element method*. New York, Mc Graw-Hill Publishing Company 1977.
- Desai, C.S., Abel, J.F. *Introduction to the Finite Element method*. New York, Reinhold, 1972.
- Duncan, J.M. State of the Art: Limite Equilibrium and Finite Element Analysis of Slope. In *Journal of Geotechnical Engineering*, vol. 122 ,1996.
- Schweiger, H.F., Kofler, M. Schuller, H. Some recent development in finite element analysis of shallow tunnels. *Felsbau*, vol. 17, 1999.
- Potts, D.M, Zdravkovič, L. *Finite element analysis in geotechnical Engineering*, Telford, London ,1999.

Nejvýznamnější domácí autoři, kteří se zasloužili o rozvoj a aplikaci metody konečných prvků v inženýrských stavebních úlohách

- „Brněnská škola „ vedená prof. Milošem Zlámalem
- 1. československá kniha o MKP (kolektiv profesorů Kolář, Kratochvíl, Leitner, Ženíšek)- Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků, SNTL, Praha, 1979
- a další



prof. Ženíšek

Softwarové systémy pracující na základě MKP pro aplikace v geotechnice a podzemním stavitelství dostupné na katedře Geotechniky a podzemního stavitelství

PLAXIS 2D	firma Plaxis, Holandsko, rovinné modelování
PLAXIS 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování
TUNNEL 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování úloh především z oblasti tunelování
FOUNDATION 3D	firma Plaxis, Holandsko, prostorové modelování úloh z oblasti zakládání
CESAR	firma Itech, Francie, rovinné i prostorové modelování geotechnických úloh
GEO MKP	firma Fine, ČR, rovinné úlohy

GEO MKP

firma Fine, ČR, rovinné úlohy

MIDAS GTS

firma TNO Diana, Holandsko, rovinné i prostorové modely

PHASE

firma Rocscience, Kanada, rovinné úlohy, existuje i prostorová verze

ATENA

firma Červenka, ČR, řešení konstrukcí

ANSYS

velmi univerzální programový systém, nejen pro geotechniku

a další specializované softwary ...