evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Metody řešení soustav rovnic

(výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

Metoda konečných prvků vyžaduje řešení rozsáhlých soustav rovnic (řádově až statisíce):

$$K\vec{u} = \vec{F}$$

OBECNÉ ŘEŠENÍ SOUSTAVY:

$$\vec{u} = K^{-1}\vec{F}$$

K^{-1} – tzv. *inverzní matice*

Způsob řešení soustavy závisí do značné míry na typu matice soustavy –existují pak specializované algoritmy pro řešení soustav s určitým typem matice (matice symetrická, pásová apod.)

Možnosti řešení výsledné soustavy rovnic

1) přímé metody řešení – Gaussova eliminační metoda, modifikovaná Gaussova eliminační metoda (frontální)- nevýhodou přímých metod je malá rychlost, kumulace zaokrouhlovacích chyb

Pro úlohy s nelineárním chováním prostředí je nutno soustavu řešit iteračně:

2)iterační metody –řešení soustavy se hledá jako posloupnost postupných přiblížení k samotnému řešení, metody jsou rychlejší ve srovnání s přímými metodami, ale je třeba vhodně volit počáteční aproximaci pro konvergenci metody a stanovit kritérium ukončení iteračního postupu

Nejčastěji používané přímé metody řešení soustav lineárních rovnic

1) *Cramerovo pravidlo-* řešení soustav lin. rovnic o n neznámých se převádí na výpočet (n+1determinantů n-tého stupně, pro velké soustavy rovnic je tato metoda nevhodná

2) *Gaussova eliminační metoda-* nejrozšířenější eliminační metoda,pro rozsáhlé soustavy rovnic relativně pomalá

Princip: danou soustavu převedeme postupnými úpravami (odečítáním násobků lineárních kombinací ostatních řádků) na ekvivalentní soustavu, která má trojúhelníkovou matici

Metoda konečných prvků – Metody řešení soustav rovnic

Postup při řešení Gaussovou eliminační metodou lze rozdělit na:

a)Přímý chod – stanovení ekvivalentní soustavy s trojúhelníkovou maticí (pomocí základních řádkových úprav)

b) *Zpětný chod* – určení neznámých x_i, i=1,…, n

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
\xRightarrow{\text{přímý chod}}
\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \tilde{a}_{ii} & \cdots & \tilde{a}_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \tilde{b}_i \\ \vdots \\ \tilde{b}_n \end{bmatrix}
\Bigg\uparrow \text{zpětný chod}
$$

OBECNÝ POSTUP ITERAČNÍCH METOD

opakované řešení soustavy

$$\Delta U_i = Q^{-1} R_i$$

reziduum v i-té iteraci: $$R_i = F - KU_i$$

iterační předpis: $$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$$

Různé iterační metody volí matici Q (preconditioner) jinak, je odvozena z matice tuhosti, avšak základní podmínkou pro její volbu je co nejjednodušší výpočet inverzní matice Q^{-1} při opakovaném řešení soustavy.

Nejjednodušší volba: Q=diag (K)

- Této volbě matice Q odpovídá tzv. Jacobiho iterační metoda:
  upravený iterační předpis této metody:

$$u_j^{i+1} = \frac{1}{k_{jj}} \left(F_j - \sum_{m=1}^{j-1} k_{jm} u_m^i - \sum_{m=j+1}^{n} k_{jm} u_m^i \right), \; j = 1,\dots,n$$

- další varianta: Gauss-Seidlova iterační metoda:

iterační předpis:

$$u_j^{i+1} = \frac{1}{k_{jj}} \left(F_j - \sum_{m=1}^{j-1} k_{jm} u_m^{i+1} - \sum_{m=j+1}^{n} k_{jm} u_m^i \right), \; j = 1,\dots,n$$

menší nároky na paměť ve srovnání s Jacobiho iterační metodou

- další iterační metody:

  Newtonova metoda

  Newton –Raphsonova

  gradientní metody(metoda sdružených gradientů)

  metoda největšího spádu

Shrnutí

Přímé metody

1) nevyžadují volbu počáteční aproximace

2) jsou pomalejší

3) relativně velké nároky na paměť

Iterační metody

1) Vyžadují volbu počáteční aproximace a kritéria ukončení iterace

2) Rychlejší

3) Nutnost uchování menšího množství dat