



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Základy konstitutivního modelování (výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

KONSTITUTIVNÍ MATERIÁLOVÝ MODEL

Konstitutivní materiálový model – popisuje chování materiálu, udává obecně vztah mezi deformací (přetvořením) materiálu a jeho stavovými veličinami (proměnné veličiny charakterizující stav materiálu – např. napětí, pórovitost, ...).

Konstitutivní model standardně definuje vztah mezi přetvořením a napětím.

Stanovení vhodného konstitutivního modelu chování materiálu je nejdůležitější, ale současně i nejobtížnější část tvorby matematického modelu.

Obecný zápis konstitutivního modelu

$$\Delta \vec{\sigma} = D \Delta \vec{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{\varepsilon} = D^{-1} \Delta \vec{\sigma} = C \Delta \vec{\sigma}$$

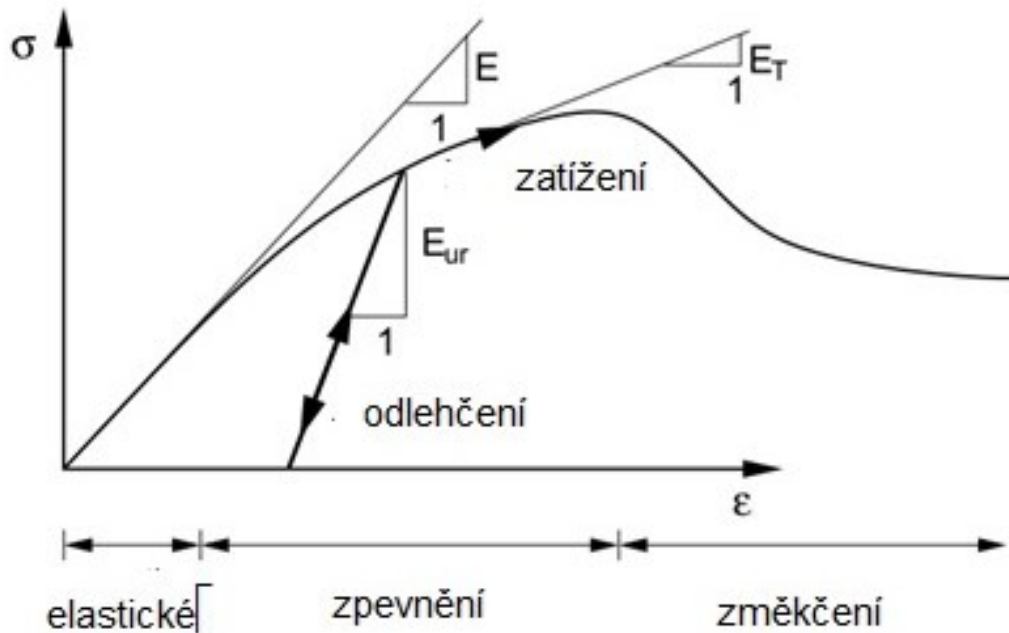
$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy})^T$$

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})^T$$

D.... matice tuhosti, $D^{-1}=C$.. matice poddajnosti

Různé typy konstitutivních modelů se pak liší obecně tím, zda matice tuhosti D závisí na přírůstku deformace $\Delta \varepsilon$ a na stavových proměnných.

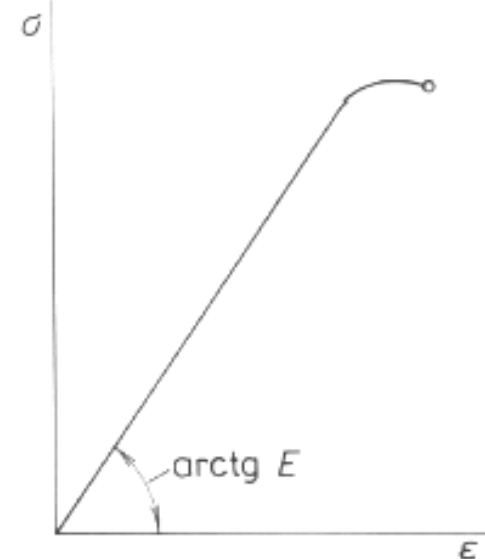
Reálný obecný materiálový model chování zemin



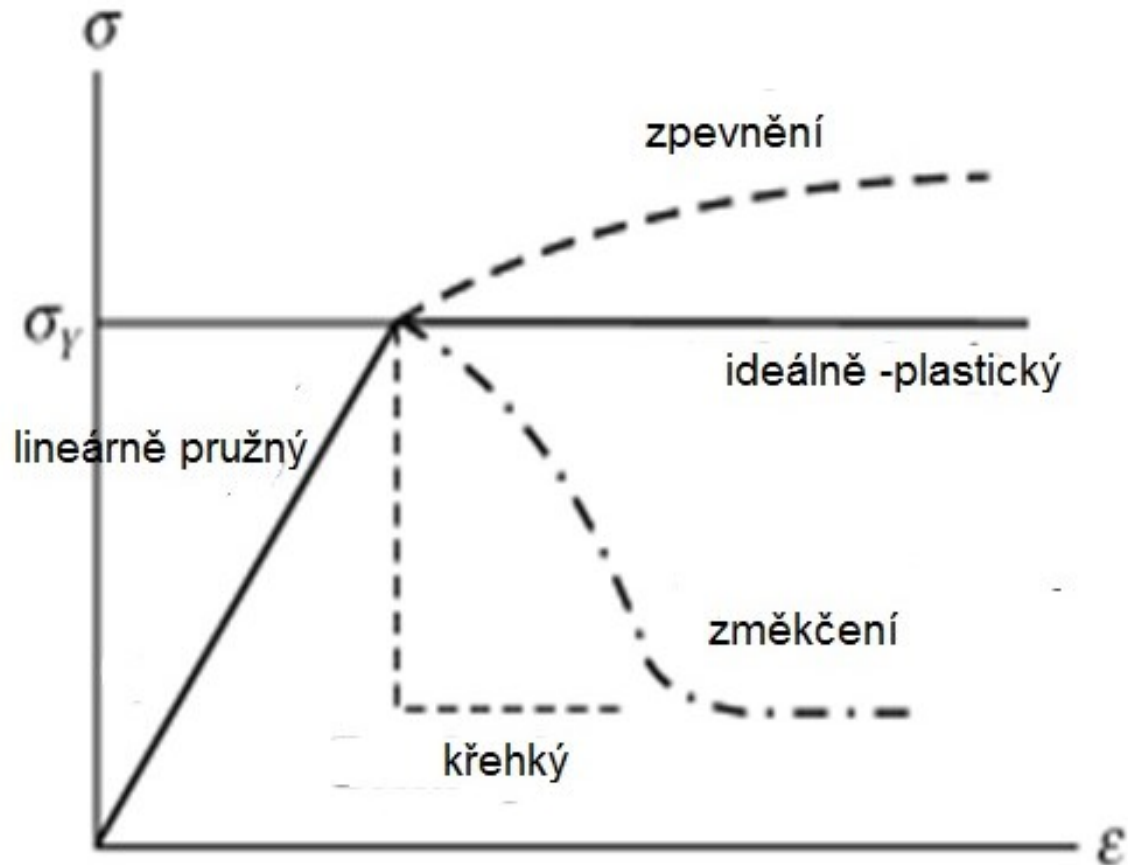
Každý druh materiálu (tedy i horninového) má určitý specifický model chování, ve kterém může převládat pružná či plastická složka.

Materiály křehké (brittle)

- materiál se chová téměř v celém průběhu zatěžování pružně
- porušení obvykle křehkým lomem
- deformace před porušením malé
- akumulace energie, při porušení možnost vzniku otřesového efektu
- do této skupiny materiálů patří např. skalní horniny

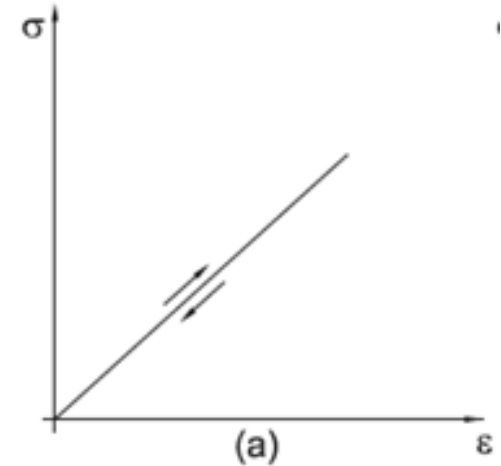


Přehled základních idealizovaných modelů chování materiálů

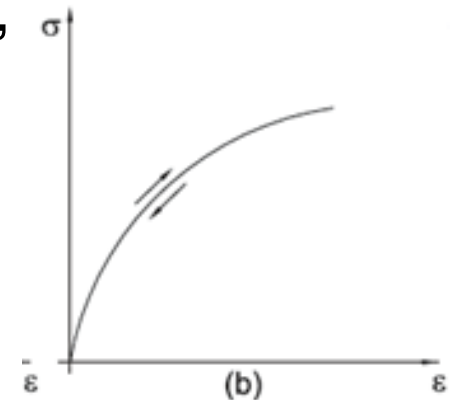


PRUŽNÉ CHOVÁNÍ MATERIÁLŮ

- **Lineárně pružný (linear elastic)** – lineární vztah mezi napětím a přetvořením daný Hookovým zákonem, přetvoření jsou vratná



- **Nelineárně pružný (non-linear elastic)** – nelineární vztah mezi napětím a přetvořením (např. hyperbolický), přetvoření jsou vratná



Lineárně pružný model

V nejjednodušším případě je vztah mezi napětím a deformací lineární a je dán Hookovým zákonem s materiálovými charakteristikami

- E (Youngův modul pružnosti)
- resp. smykový modul pružnosti G
- μ (Poissonovo číslo)

-zohledňuje pouze pružné přetváření

-neumožňuje vyhodnotit porušování

-vhodný pouze pro prvotní, dílčí představu chování

Rozšířený Hookův zákon

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

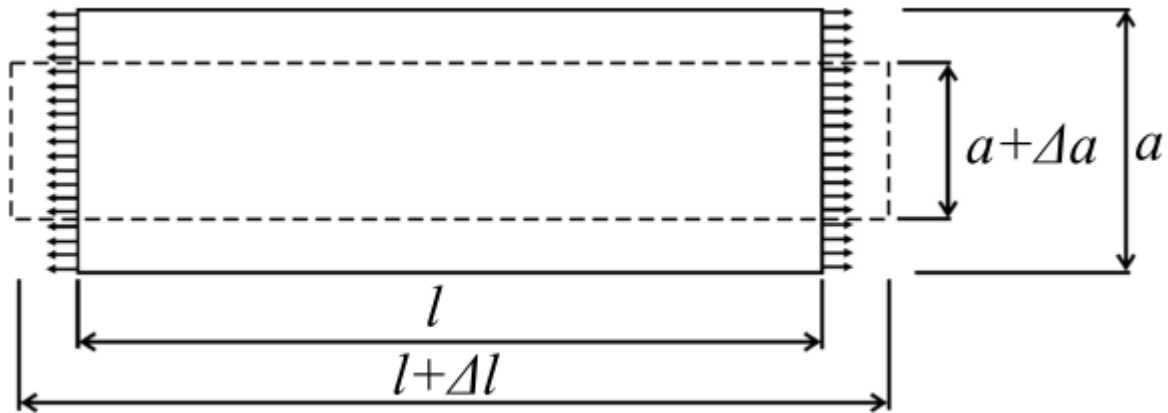
$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Za předpokladu lineární závislosti mezi napětím a přetvořením má tedy matice $C=D^{-1}$ tvar:

$$\frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{pmatrix}$$

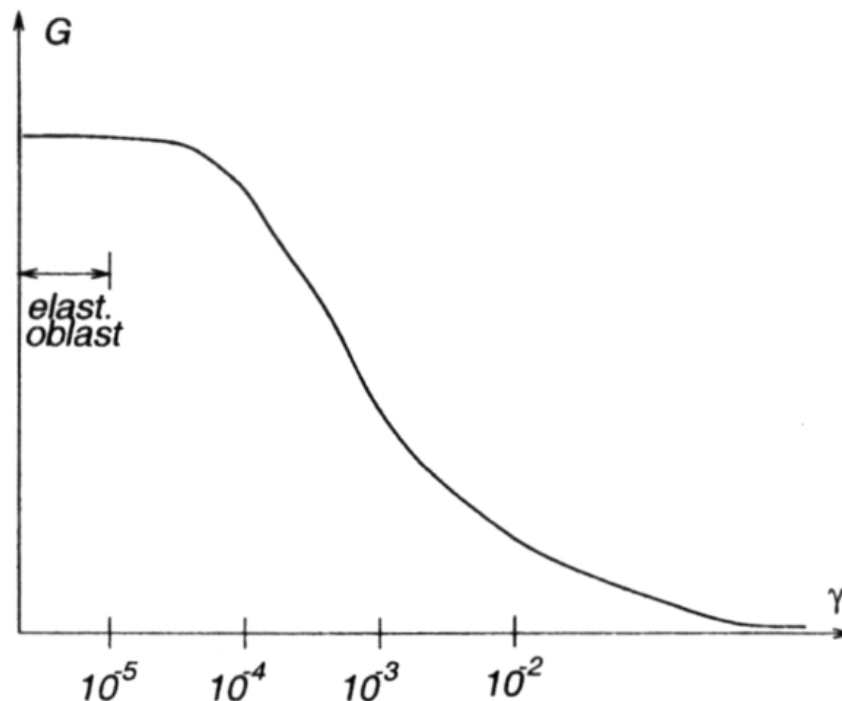
Význam Poissonova čísla



$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_p = \frac{\Delta a}{a},$$

$$\varepsilon_p = \mu \varepsilon_l \Rightarrow \mu = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_l}$$

V oboru velmi malých přetvoření (řádově 10^{-3} %) lze považovat přetvoření za vratná, při větších přetvořeních je nutno již obvykle uvažovat i s nevratnými (plastickými) přetvořeními. Se zvětšujícím se přetvořením navíc klesá tuhost.

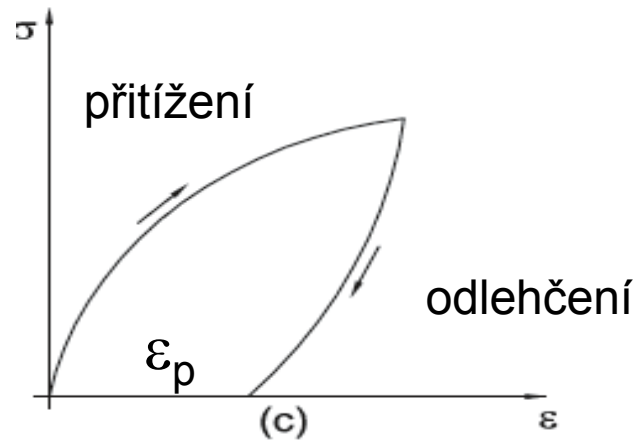


(zdroj: Mašín)

Pružně - plastické konstitutivní modely

Předpokládají rozdělení deformací na pružnou (vratnou) ε_e a plastickou (nevratnou) ε_p složku, tj. celkové přetvoření ε

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$



Plocha plasticity

Pružně plastické konstitutivní modely zavádějí tzv. **plochu plasticity (yield surface)** $f(\sigma)=0$, která je vyjádřena pomocí určité **podmínky plasticity** $f(\sigma)$ odpovídající jednotlivým konstitutivním modelům.

Tato funkce plasticity je základem pro rozlišení, zda dochází k pružnému nebo plastickému přetvoření.

Pokud vyjádříme podmínku plasticity pomocí hlavních napětí, dostáváme po záměně pořadí hlavních os napětí v prostoru $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ **prostorovou plochu plasticity**, dělící celý prostor hlavních napětí na dvě části.

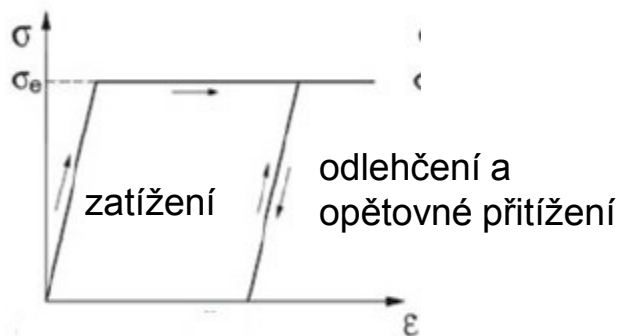
Uvnitř stanovené plochy plasticity se materiál chová pružně.

Na ploše plasticity $f(\sigma)=0$ pak dále rozhoduje o chování přírůstek deformace. Přírůstek deformace může směřovat buď k elastoplastickému přitěžování nebo elastickému odlehčování.

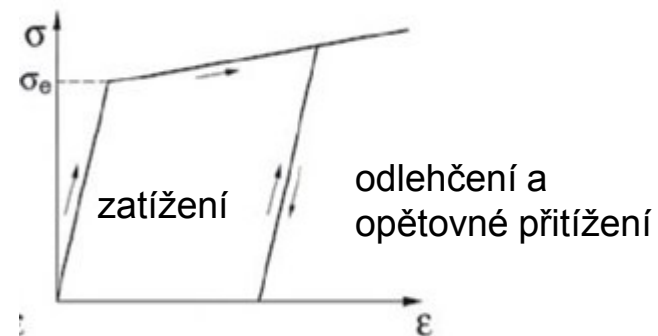
Charakteristika základních pružně-plastických modelů

- Pružně ideálně-plastický (linear elastic- perfectly plastic) – do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při konstantním napětí, nejčastěji používaný materiálový Mohr- Coulomb model
- Model pružně plastický se zpevněním (hardening)- do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při zvyšujícím se napětí až do porušení, nejznámějším modelem tohoto charakteru je model Cam-Clay

Pružně-ideálně plastický model



Pružně plastický se zpevněním



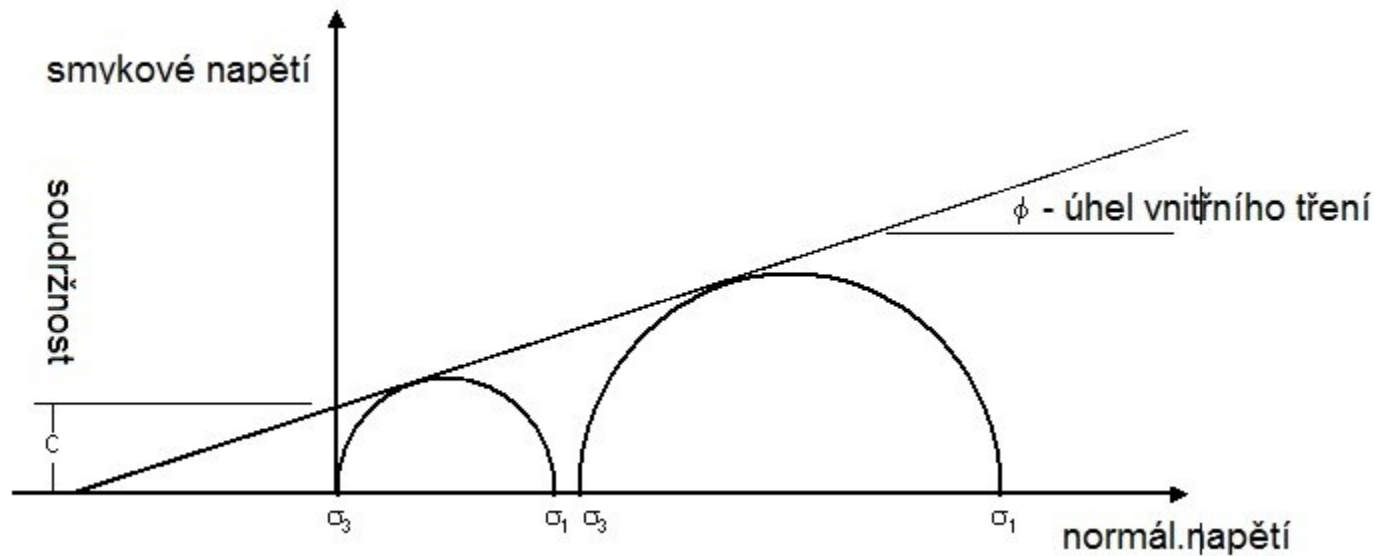
Charakteristika základních idealizovaných materiálových modelů

- Model pružně plastický se změkčením (softening) -do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při snižujícím se napětí až do porušení
- další pokročilé plastické konstitutivní modely (např. hypoplastický model Mašín)

Mohr-Coulomb (pružný-ideálně plastický model)

- nejčastěji využívaný v geotech. praxi, i když nemusí poskytovat vždy zcela objektivní výsledky
- pružný-ideálně plastický model (bez zpevnění)
- 5 základních charakteristik (modul pružnosti, Poissonovo číslo, soudržnost, úhel vnitřního tření, úhel dilatance), nezohledňuje stavový charakter charakteristik– avšak výhodou je, že využívá standardní laboratorní výstupy
- nezohledňuje změnu tuhosti v závislosti na přetvoření, stejný modul pružnosti při zatěžování i odlehčování
- identická podmínka pro plasticitu i porušení
- reálnější výsledky při řešení stabilitních úloh, deformace není schopen modelovat zcela objektivně

Grafické vyjádření Mohr-Coulombovy podmínky porušení a plasticity



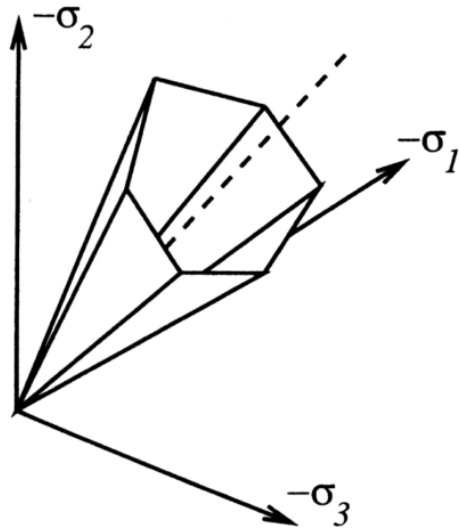
Vyjádření Mohr-Coulombovy obalové čáry :

$$\tau = \sigma \tan \varphi + c$$

Podmínka plasticity a porušení Mohr-Coulombova modelu vyjádřená v hlavních napětích

$$f = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) + 0.5(\sigma_1 + \sigma_3)\sin \varphi - c \cos \varphi$$

V prostoru hlavních napětí představuje plocha plasticity pravidelný šestiboký jehlan.

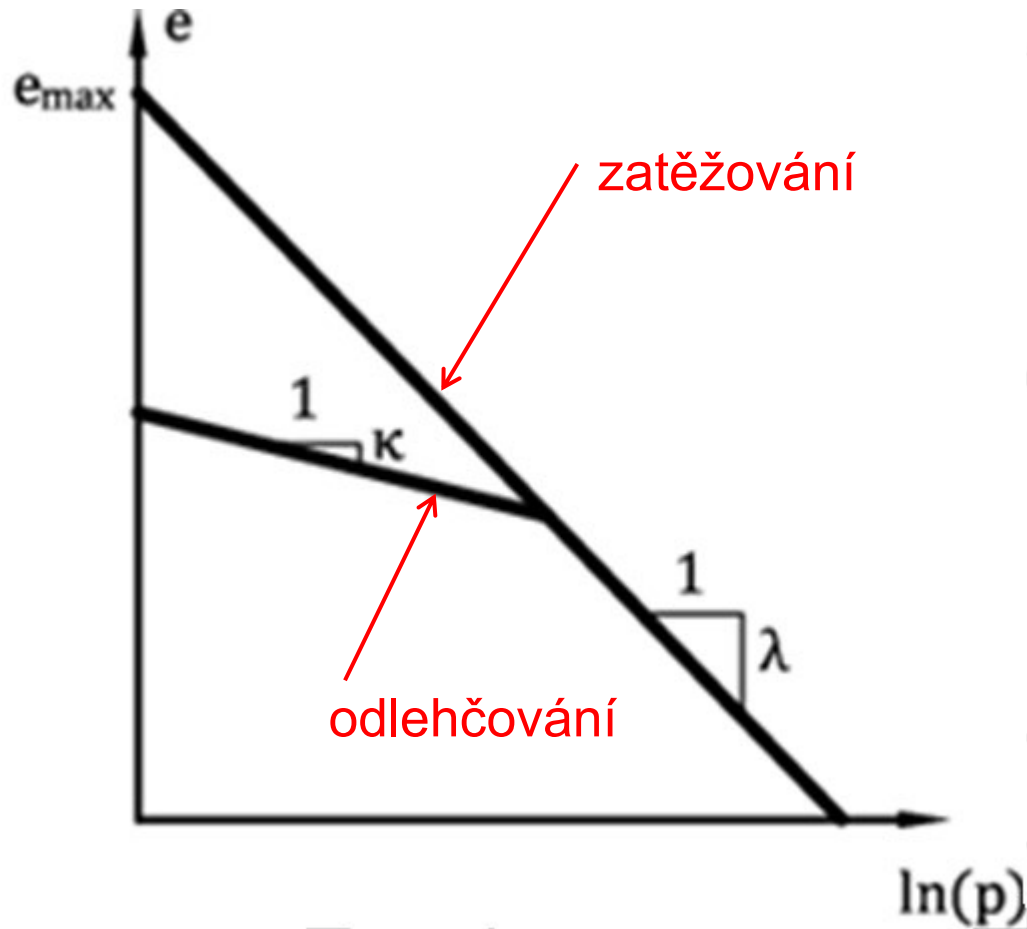


Grafické znázornění plochy plasticity v případě nesoudržných materiálů ($c=0$)

Cam-Clay model (pružně plastický model se zpevněním)

- nejčastěji používaný pružně-plastický model se zpevněním (izotropním)
- vznik na počátku 60. let 20.století na University of Cambridge
- (Roscoe)
- zpevnění je funkcí přírůstku plastického objemového přetvoření, které je svázáno se změnou čísla pórovitosti e
- stlačitelnost při zatěžování je určena charakteristikou λ , při odlehčování charakteristikou κ (kde p -střední napětí)

Význam parametrů λ a κ v modelu Cam-Clay



Hypoplastický materiálový model

- patří mezi pokročilé nelineární materiálové modely (Mašín, 2005)
- je schopen objektivněji zohlednit reálné chování materiálů, zejména měkkých jemnozrnných zemin
- přetvoření se nedělí na pružné a plastické
- využívá mechaniky kritických stavů, pórovitost je považována za stavovou veličinu
- vyžaduje zadání 5 materiálových charakteristik, jejich stanovování je komplikovanější ve srovnání např. s Mohr-Coulombem

Základní porovnání aspektů konstitutivních modelů

Základní aspekty chování zemin	Lineárně pružný model	Mohr-Coulomb	Cam-Clay model	Hypoplastický model(Mašín)
Mezní plocha stavů	N	A (pouze plocha porušení)	A	A
Závislost chování na středním napětí a pórovitosti	N	N	A	A
Nelineární chování zemin	N	N	N	A
Závislost tuhosti na historii zatěžování	N	N	N	A
Závislost tuhosti na úrovni napětí	N	N	A (pouze objem.tuhost)	A

Při volbě vhodných konstitutivních (fyzikálních) vztahů pro daný materiál je vždy nutno zejména s ohledem na časové nároky praxe optimalizovat vztah:

dostupnost vstupních charakteristik \times výstižnost chování horninového prostředí

www.soilmodels.info – otevřená databáze konstitutivních modelů pro numerickou analýzu, interface pro implementaci do softwarů