INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Analýza s využitím trojúhelníkového prvku s lineární aproximací posunů

(výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

Metoda konečných prvků postupuje od analýzy jednotlivých konečných prvků k analýze celé kontinuální oblasti

ANALÝZA JEDNOHO TROJÚHELNÍKOVÉHO KONEČNÉHO PRVKU

- volba aproximační funkce posunů na daném prvku
- vyjádření aproximační funkce posunů na daném prvku pomocí uzlových parametrů a bázových funkcí
- vyjádření poměrných přetvoření na daném prvku pomocí uzlových parametrů
- vyjádření napětí na daném prvku pomocí uzlových parametrů
- vyjádření potenciální energie prvku pomocí uzlových parametrů, sestavení lokálních matic tuhosti jednotlivých prvků

1) aproximace spojité funkce posunů u, v :

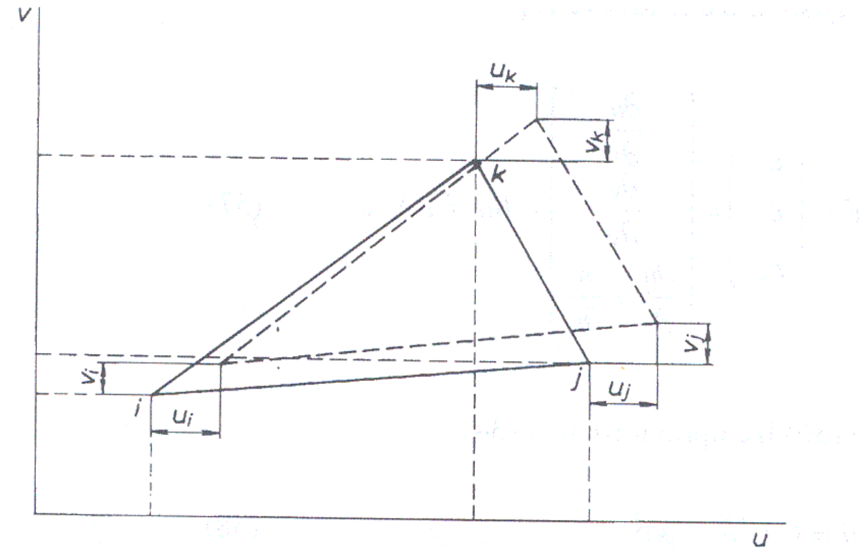
$$u(x,y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$
$$v(x,y) = a_4 + a_5 x + a_6 y \qquad (1)$$

$$\vec{u} = U\vec{a}, \quad \vec{u} = \left(u(x,y), v(x,y)\right)^T$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\right)^T$$

2) dosazení souřadnic vrcholu trojúhelníka do aproximační rovnice:



$$\vec{\delta} = A\vec{a}$$

$$\vec{\delta} = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_k, v_k)^T$$

$$u_i = u(x_i, y_i), u_j = u(x_j, y_j),$$

$$u_k = u(x_k, y_k)$$

$$v_i = v(x_i, y_i), v_j = v(x_j, y_j),$$

$$v_k = v(x_k, y_k)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}$$

A – matice 6x6, jejíž prvky již nejsou funkcemi proměnných x a y, ale závisí na konkrétních souřadnicích vrcholů trojúhelníka (známé uzlové body prvku)

3) vyjádření konstant a_i pomocí hodnot aproximační funkce v uzlových bodech (uzlových parametrů):

$$\vec{a} = A^{-1}\vec{\delta} \qquad (2)$$

A^{-1} – matice 6x6, inverzní k matici A

soustava 3 lin. rovnic pro určení neznámých konstant a_i:

$$a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i = u_i$$

$$a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j = u_j$$

$$a_1 + a_2 x_k + a_3 y_k = u_k$$

$$a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i = v_i$$

$$a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j = v_j$$

$$a_4 + a_5 x_k + a_6 y_k = v_k$$

3) vyjádření konstant a_i pomocí hodnot aproximační funkce v uzlových bodech (uzlových parametrů)-pokračování:

Cramerovo pravidlo:

$$a_1 = \frac{1}{\det S}\left[\left(x_j y_k - x_k y_j\right)u_i + \left(x_k y_i - x_i y_k\right)u_j + \left(x_i y_j - x_j y_i\right)u_k\right]$$

$$a_2 = \frac{1}{\det S}\left[\left(y_j - y_k\right)u_i + \left(y_k - y_i\right)u_j + \left(y_i - y_j\right)u_k\right]$$

$$a_3 = \frac{1}{\det S}\left[\left(x_k - x_j\right)u_i + \left(x_i - x_k\right)u_j + \left(x_j - x_i\right)u_k\right]$$

$$a_4 = \frac{1}{\det S}\left[\left(x_j y_k - x_k y_j\right)v_i + \left(x_k y_i - x_i y_k\right)v_j + \left(x_i y_j - x_j y_i\right)v_k\right]$$

$$a_5 = \frac{1}{\det S}\left[\left(y_j - y_k\right)v_i + \left(y_k - y_i\right)v_j + \left(y_i - y_j\right)v_k\right]$$

$$a_6 = \frac{1}{\det S}\left[\left(y_j - y_k\right)v_i + \left(y_k - y_i\right)v_j + \left(y_i - y_j\right)v_k\right]$$

3) vyjádření konstant a_i pomocí hodnot aproximační funkce v uzlových bodech (uzlových parametrů)-pokračování:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i & 0 \\ y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i \\ 0 & y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \end{pmatrix}$$

3) vyjádření konstant a_i pomocí hodnot aproximační funkce v uzlových bodech (uzlových parametrů)-pokračování:

Zavedení značení:

$$a_i^* = x_j y_k - x_k y_j$$
$$b_i^* = y_j - y_k$$
$$c_i^* = x_k - x_j$$

$$a_j^* = x_k y_i - x_i y_k$$
$$b_j^* = y_k - y_i$$
$$c_j^* = x_i - x_k$$

$$\longrightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det S}\begin{pmatrix} a_i^* & 0 & a_j^* & 0 & a_k^* & 0 \\ b_i^* & 0 & b_j^* & 0 & b_k^* & 0 \\ c_i^* & 0 & c_j^* & 0 & c_k^* & 0 \\ 0 & a_i^* & 0 & a_j^* & 0 & a_k^* \\ 0 & b_i^* & 0 & b_j^* & 0 & b_k^* \\ 0 & c_i^* & 0 & c_j^* & 0 & c_k^* \end{pmatrix}$$

$$a_k^* = x_i y_j - x_j y_i$$
$$b_k^* = y_i - y_j$$
$$c_k^* = x_j - x_i$$

4) vyjádření aproximačních funkcí pomocí hodnot posunů v uzlových bodech a pomocí bázových funkcí:

dosazení (2) do (1):

$$\vec{u} = U\,A^{-1}\vec{\delta} = N\vec{\delta}$$

$$N = U\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} A^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} N_i(x,y) & 0 & N_j(x,y) & 0 & N_k(x,y) & 0 \\ 0 & N_i(x,y) & 0 & N_j(x,y)) & 0 & N_k(x,y) \end{pmatrix}$$

N_i, N_j, N_k - bázové funkce odpovídající lin. aproximaci na trojúhelníku:

$$N_i(x,y) = (a_i^* + xb_i^* + yc_i^*)/\det S$$
$$N_j(x,y) = (a_j^* + xb_j^* + yc_j^*)/\det S$$
$$N_k(x,y) = (a_k^* + xb_k^* + yc_k^*)/\det S$$

4) vyjádření aproximačních funkcí pomocí hodnot posunů v uzlových bodech a pomocí bázových funkcí- pokračování:

$$u(x,y)=\frac{1}{\det S}\Big[(a_i^*+xb_i^*+yc_i^*)u_i+(a_j^*+xb_j^*+yc_j^*)u_j+$$
$$+(a_k^*+xb_k^*+yc_k^*)u_k\quad\Big]$$

$$v(x,y)=\frac{1}{\det S}\Big[(a_i^*+xb_i^*+yc_i^*)v_i+(a_j^*+xb_j^*+yc_j^*)v_j+$$
$$+(a_k^*+xb_k^*+yc_k^*)v_k\quad\Big]$$

Tedy:

$$u(x,y)=N_i(x,y)u_i+N_j(x,y)u_j+N_k(x,y)u_k$$
$$v(x,y)=N_i(x,y)v_i+N_j(x,y)v_j+N_k(x,y)v_k$$

Vlastnosti bázových funkcí:

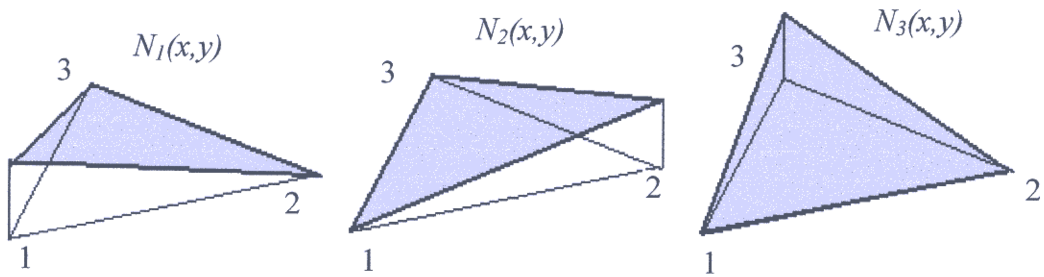
$$N_i(x_i, y_i) = 1,\ N_i(x_j, y_j) = 0,\ N_i(x_k, y_k) = 0,$$

$$N_j(x_j, y_j) = 1,\ N_j(x_i, y_i) = 0,\ N_j(x_k, y_k) = 0$$

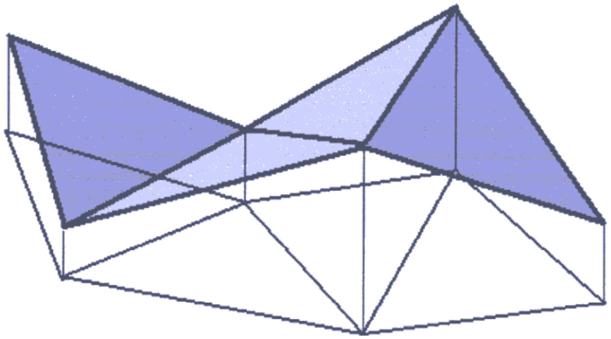
$$N_k(x_k, y_k) = 1,\ N_k(x_i, y_i) = 0,\ N_k(x_j, y_j) = 0$$

$\longrightarrow$ pásovost matice tuhosti

Bázové funkce trojúhelníkového prvku:



Spojitá po částech lineární aproximace posunů nad trojúhelníkovými prvky:



5) vyjádření poměrných přetvoření pomocí uzlových parametrů

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = B\,\vec{a} = BA^{-1}\vec{\delta}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) -vyjádření napětí na daném prvku pomocí uzlových parametrů

Z přijatého konstitutivního vztahu (v nejjednodušším případě z Hookova zákona) a po dosazení za ε:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\varepsilon} = DBA^{-1}\vec{\delta}$$

D-matice materiálových konstant

7) -vyjádření potenciální energie prvku pomocí uzlových parametrů na oblasti Q s konstantní tloušťkou t:

Potenciální energie vnitřních sil:

$$\Pi_i = \frac{1}{2}\int\int \vec{\varepsilon}^{\,T}\vec{\sigma}\, t dQ$$

Potenciální energie vnějších sil (superpozice energie objemových sil X a povrchových sil p působících na hranici Γ oblasti):

$$\Pi_e = \iint_Q \vec{X}^T\vec{u}\, dQ + \iint_\Gamma \vec{p}^{\,T}\vec{u} d\Gamma$$

8) celková potenciální energie prvku k

$$\Pi^k{}_c = \Pi^k{}_i - \Pi^k{}_e = \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_K} \vec{\varepsilon}^{\,T}\vec{\sigma} t\, dQ_K - \iint\limits_{Q_k} \vec{X}^T \vec{u}\, dQ_k - \iint\limits_{\Gamma} \vec{p}^{\,T}\vec{u}\, d\Gamma_k =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_{Q_k} \vec{\delta}_k^T \left(A_k^{-1}\right)^T B^T D_k B A_k^{-1} \vec{\delta}_k t_k\, dQ_k - \iint\limits_{Q_k} \vec{X}^T N_k \vec{\delta}_k\, d\Gamma_k - \iint\limits_{\Gamma_k} \vec{p}^{\,T} N_k \overleftarrow{\delta}_k\, d\Gamma_k$$

$$\vec{\varepsilon} = BA^{-1}\vec{\delta} \Rightarrow \vec{\varepsilon}^{\,T} = \vec{\delta}^T \left(A^{-1}\right)^T B^T$$

Označíme-li integrál součinu matic:

$$\iint\limits_{Q_k} t_k \left(A_k^{-1}\right)^T B^T D_k B A_k^{-1} = K_k$$

Pak

$$\Pi_i^k = \frac{1}{2}\vec{\delta}_k^T K_k \vec{\delta}_k$$

K_k – lokální matice tuhosti prvku k (6x6)

8) celková potenciální energie prvku k

$$\Pi_e^k = -\vec{F}_k^T \vec{\delta}_k$$

$$\vec{F}_k = \left(F_{xi}, F_{yi}, F_{xj}, F_{yj}, F_{xk}, F_{yk}\right)^T$$

Složky vektoru F mají rozměr síly, které na jednotlivých deformacích uzlů prvku konají stejnou virtuální práci jako dané zatížení X a p. Pak tedy:

$$\Pi_k = \frac{1}{2}\vec{\delta}^T K_k \vec{\delta}_k - \vec{F}_k^T \vec{\delta}_k$$

Matice tuhosti prvku k

Integrál ve vyjádření matice tuhosti K_k prvku se dá jednoduše stanovit pouze v jednoduchém případě, kdy je matice B (figuruje ve vyjádření poměrných přetvoření a napětí) konstantní.
To je zaručeno v případě, že je zvolena lineární aproximační funkce posunů(aplikace tříuzlového trojúhelníkového prvku), neboť pak je poměrné přetvoření i napětí na celém prvku konstantní.

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_6 \\ a_3 + a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix} = B\, A^{-1} \vec{\delta}$$

Matice tuhosti prvku k

Za tohoto předpokladu je v obecném vyjádření matice tuhosti K_k pro daný prvek za integrálem součin konstantních matic D_k, B, $A^{-1}{}_k$, lze tedy tento součin vytknout před integrál a dostáváme tvar matice tuhosti:

$$K_k = \iint_{Q_k} t_k \left(A_k^{-1}\right)^T B^T D_k B A_k^{-1} dQ_k = t_k \left(A_k^{-1}\right)^T B^T D_k B A_k^{-1} \iint_{Q_k} dQ_k = t_k \left(A_k^{-1}\right)^T B^T D_k B A_k^{-1} \Delta_k$$

kde Δ_k je plocha daného prvku k

Pokud jsou použity k aproximaci posunů nelineární závislosti, matice B nebude konstatní a pro vyčíslení matice tuhosti K_k je třeba provést numerickou integraci v tzv. Gaussových bodech.

Analýza celého tělesa - celková potenciální energie celého tělesa složeného z *m* konečných prvků a charakterizovaného *n* uzly

$$\Pi = \sum_{k=1}^{m} \Pi_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2} \vec{\delta}_k^T K_k \vec{\delta}_k - \sum_{k=1}^{m} \vec{F}_k^T \vec{\delta}_k = \frac{1}{2} \vec{\delta}^T K \vec{\delta} - \vec{F}^T \delta$$

$$\vec{\delta} = (u_1, v_1, u_2, v_{2,} u_3, v_3, \ldots, u_n, v_n)^T$$

$$\vec{F} = \left(F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}, \ldots, F_{xn}, F_{yn}\right)^T$$

kde K je výsledná (globální) matice tuhosti, F je výsledný vektor transformovaného zatížení, δ vektor uzlových parametrů.

Globální matice tuhosti tělesa

Každý řádek lokální matice tuhosti prvku je tvořen koeficienty rovnic, které vyjadřují rovnováhu sil od napětí v prvku, a to v jednotlivých uzlech a v jednotlivých směrech.

Výsledná síla působící v každém uzlu tělesa je dána sumací všech sil, které působí v tomto v tomto uzlu ve všech příslušných prvcích.

Z této filosofie vychází vytváření globální matice tuhosti celého tělesa.

Globální matice tuhosti tělesa

Jestliže má síť konečných prvků *n* uzlů a v každém uzlu je definováno *l* uzlových parametrů, pak je výsledná globální matice Tuhosti čtvercová matice o *n x l* sloupcích a *n x l* řádcích.

K redukci dimenze matice tuhosti dochází zadáním okrajových podmínek, které jisté řádky a sloupce z matice eliminují.

V případě rovinné úlohy pružnosti jsou v každém uzlu definovány 2 uzlové parametry – posun ve směru horizontálním *u* a posun ve směru vertikálním *v*, globální matice tuhosti má tedy *2 x n* řádků a *2 x n* sloupců (*l*=2).

Globální matice tuhosti K

$$K = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{11} & a_{12} & b_{12} & a_{13} & b_{13} & . & . & . & a_{1n} & b_{1n} \\ c_{11} & d_{11} & c_{12} & d_{12} & c_{13} & d_{13} & . & . & . & c_{1n} & d_{1n} \\ a_{21} & b_{21} & a_{22} & b_{22} & a_{23} & b_{23} & . & . & . & a_{2n} & b_{2n} \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ c_{n1} & d_{n1} & c_{n2} & d_{n2} & c_{n3} & d_{n3} & . & . & . & c_{nn} & d_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{uzel č. 1, směr x} \\ \longrightarrow \text{uzel č. 1, směr y} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \longrightarrow \text{uzel č. n, směr y} \end{array}$$

Globální matici tuhosti K dostaneme příslušnou lokalizací matic tuhosti prvků v celkové matici tuhosti .

Funkcionál celkové potenciální energie po roznásobení matice K a vektorů :

$$\Pi = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i u_j a_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i v_j d_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j b_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_i v_j c_{ij}\right) - \sum_{i=1}^{n} F_{xi} u_i - \sum_{i=1}^{n} F_{yi} v_i$$

Lagrangeův variační princip: $\delta\Pi = 0$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta u_i} = 0, i = 1,2,\ldots,n$$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta v_i} = 0, i = 1,2,\ldots,n$$

Tedy po derivaci dostáváme soustavu (*2x n*) rovnic pro neznámé u_i, v_i, $i=1,\dots,n$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta u_1} = \frac{1}{2}\left(2u_1a_{11} + 2v_1b_{11} + 2u_2a_{12} + 2v_2b_{12} + \ldots + 2u_na_{1n} + 2v_nb_{1n}\right) - F_{x1} = 0$$

$$\frac{\delta\Pi}{\delta v_1} = \frac{1}{2}\left(2u_1c_{11} + 2v_1d_{11} + 2u_2c_{12} + 2v_2d_{12} + \ldots + 2u_nc_{1n} + 2v_nd_{1n}\right) - F_{y1} = 0$$

.

.

.

$$\frac{\delta\Pi}{\delta v_n} = \frac{1}{2}\left(2u_1c_{n1} + 2v_1d_{n1} + 2u_2c_{n2} + 2v_2d_{n2} + \ldots + 2u_nc_{nn} + 2v_nd_{nn}\right) - F_{yn} = 0$$

Po úpravě:

$$\left(u_1 a_{11} + v_1 b_{11} + u_2 a_{12} + v_2 b_{12} + \ldots + u_n a_{1n} + v_n b_{1n}\right) = F_{x1}$$

$$\left(u_1 c_{11} + v_1 d_{11} + u_2 c_{12} + v_2 d_{12} + \ldots + u_n c_{1n} + v_n d_{1n}\right) = F_{y1}$$

.

.

.

$$\left(u_1 c_{n1} + v_1 d_{n1} + u_2 c_{n2} + v_2 d_{n2} + \ldots + u_n c_{nn} + v_n d_{nn}\right) = F_{yn}$$

Tedy dostáváme soustavu rovnic pro neznámé hodnoty posunů v uzlových bodech:

$$K\vec{\delta} = \vec{F}$$

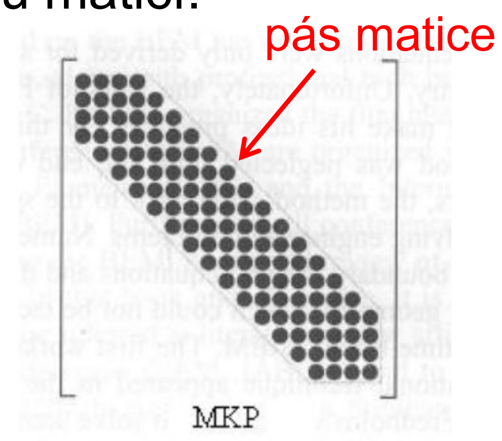
Vlastnosti globální matice tuhosti K

- Pásová – nenulové prvky soustředěny pouze kolem hlavní diagonály, pásovost vyplývá z volby bázových funkcí s tzv. malým nosičem- bázová funkce příslušející danému uzlu je nenulová pouze na těch prvcích, které mají společný tento daný uzel, na ostatních je nulová.

Šířka pásu matice je závislá na číslování uzlů- existuje optimální číslování uzlů, pro které je šířka pásu minimální – důležité z hlediska množství ukládaných dat a tedy nároků na hardware (ukládá se jen polopás) i z hlediska využití efektivních algoritmů pro řešení soustav s pásovou maticí.

Platí:

délka výpočtu= cca (počet neznámých) x (šířka pásu)^2



- Symetrická – prvky symetrické vzhledem k hlavní diagonále

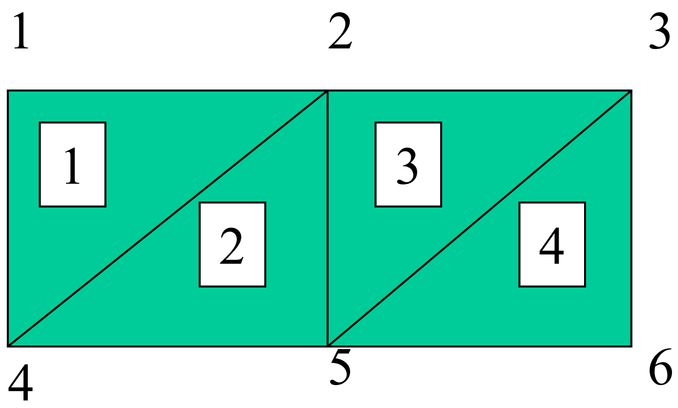
- regulární (determinant matice je nenulový , soustava má jediné řešení), tato podmínka řešitelnosti je dána zavedením geometrických okrajových podmínek, bez zadání geom. okrajových podmínek, které zamezují pohybu tělesa jako celku, je matice singulární (determinant matice tuhosti je nulový) a soustava tedy nemá jednoznačné řešení (numerické zhroucení výpočtu).

Důležitá zásada: Řešitel úlohy musí předepsat alespoň takové okrajové podmínky, aby zamezil pohybu tělesa jako celku ve všech jeho složkách.

Zadání homogenních okrajových podmínek (předepsány nulové hodnoty posunů v daných uzlech) se v matici tuhosti projeví vynecháním příslušného řádku a sloupce, který odpovídá tomuto uzlu. Adekvátně se pak vynechá odpovídající složka vektoru uzlových parametrů a vektoru vnějších sil.

Standardní geometrické podmínky v geotechnických úlohách odpovídají tzv. tuhé vaně – na vertikálních hranicích modelu jsou omezeny posuny ve směru horizontálním, na spodní hranici modelu pak posuny ve směru vertikálním.

Příklad sestavení globální matice tuhosti z matic lokálních



1,2,3,4,5,6 … uzly sítě

1 2 3 4 .. prvky

Vektor neznámých uzlových parametrů (posuny ve dvou směrech):

$$\vec{\delta} = \left(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4, u_5, v_5, u_6, v_6\right)^T$$

4 lokální matice tuhosti 6x6:K1, K2, K3, K4

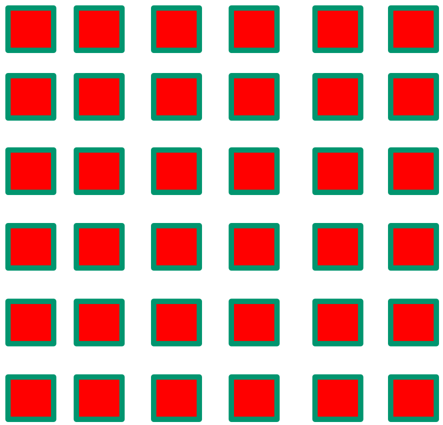
Lokální matice tuhosti (předchozí příklad)

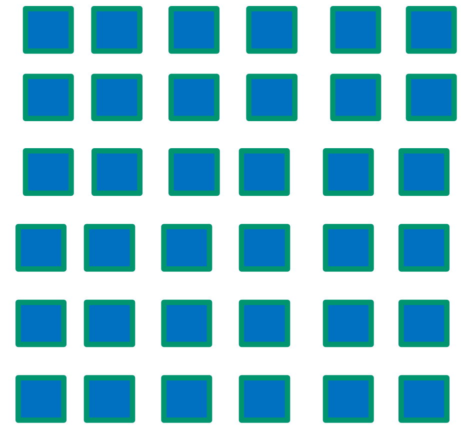
V každé lokální matici tuhosti daného prvku budou řádky, které budou vyjadřovat rovnováhu sil v uzlech, které patří danému konečnému prvku.

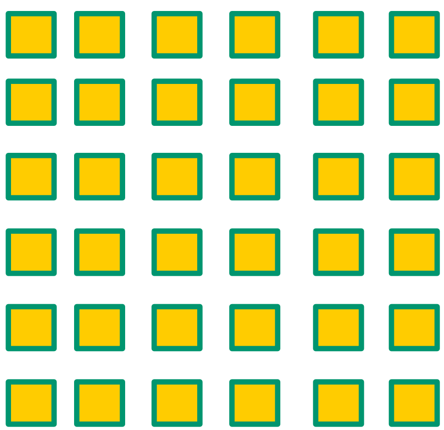
Podmínce rovnováhy v uzlech, které jsou společné více konečným prvkům, musí odpovídat řádky v lokálních maticích těchto prvků. Např. uzel č. 2 je společný prvkům 1,2,3, podmínce rovnováhy musí tedy odpovídat řádky v maticích tuhosti prvků 1,2,3.

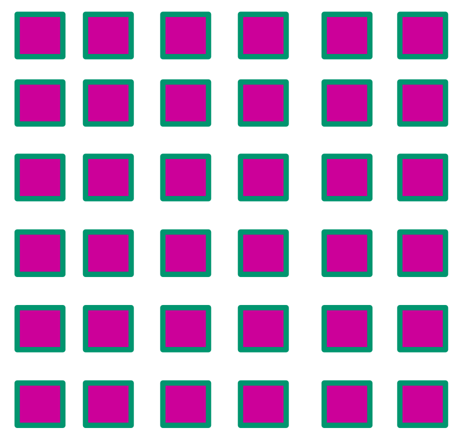
Pro sestavení globální matice tuhosti je třeba nejprve lokalizovat prvky lokálních matic tuhosti v matici globální a následně provést superpozici (sečtení příslušných prvků lokálních matic tuhosti).

Lokální matice tuhosti jednotlivých prvků

$K^{1(\text{uzly } 1,2,4)} =$ 

$K^{2(\text{uzly } 2,4,5)} =$ 

$K^{3(\text{uzly } 2,3,5)} =$ 

$K^{4(\text{uzly } 3,5,6)} =$ 

Metoda konečných prvků – Analýza s využitím trojúhelníkového prvku s lineární aproximací posunů

Princip lokalizace lokálních matic tuhosti v matici globální K

K=