



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika

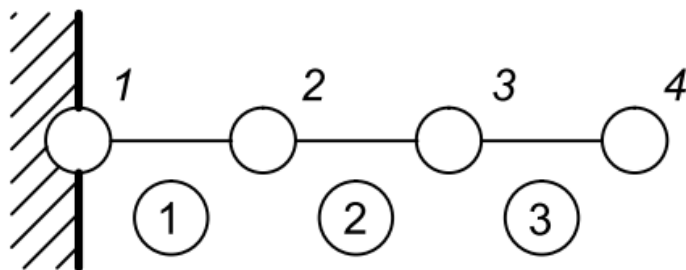
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Prutová varianta MKP (výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hruběšová, Ph.D.

Prutová varianta metody konečných prvků (jednorozměrná úloha)

Úloha: Stanovení posunů a napětí ve vetknutém nosníku délky L zatíženého pouze vlastní tíhou



4 uzly

3 prutové prvky

Předpoklad:

lineární aproximace posunů

na prvcích(prutech) – uzlové body

jsou tedy krajní body prutových prvků

E - modul pružnosti materiálu

S - průřezová plocha

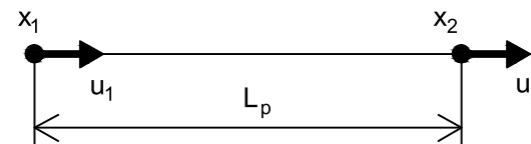
ρ – hustota materiálu

Globální vektor uzlových parametrů (v našem případě posunů):

$$\vec{\delta} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Nejjednodušší aproximace funkce posunů na jednotlivých prutech – lineární aproximace:

Obecně: $u(x)=a_1+a_2x$?? a_1, a_2



Prvek č. 1: určen uzly 1 a 2, délka prutu $L_p=L/3$

Tedy pro aproximační funkci musí platit: $u_1=u(x_1)=a_1+a_2x_1$
 $u_2=u(x_2)=a_1+a_2x_2$

Po vyřešení uvedené soustavy 2 rovnic pro 2 neznámé a_1, a_2 dostáváme:

$$a_1 = u_1 \left(\frac{-x_2}{x_1 - x_2} \right) + u_2 \left(\frac{x_1}{x_1 - x_2} \right)$$

$$a_2 = \frac{u_1 - u_2}{x_1 - x_2}$$

Tedy na prvku č. 1 budou posuny u aproximovány následujícím lineárním polynomem:

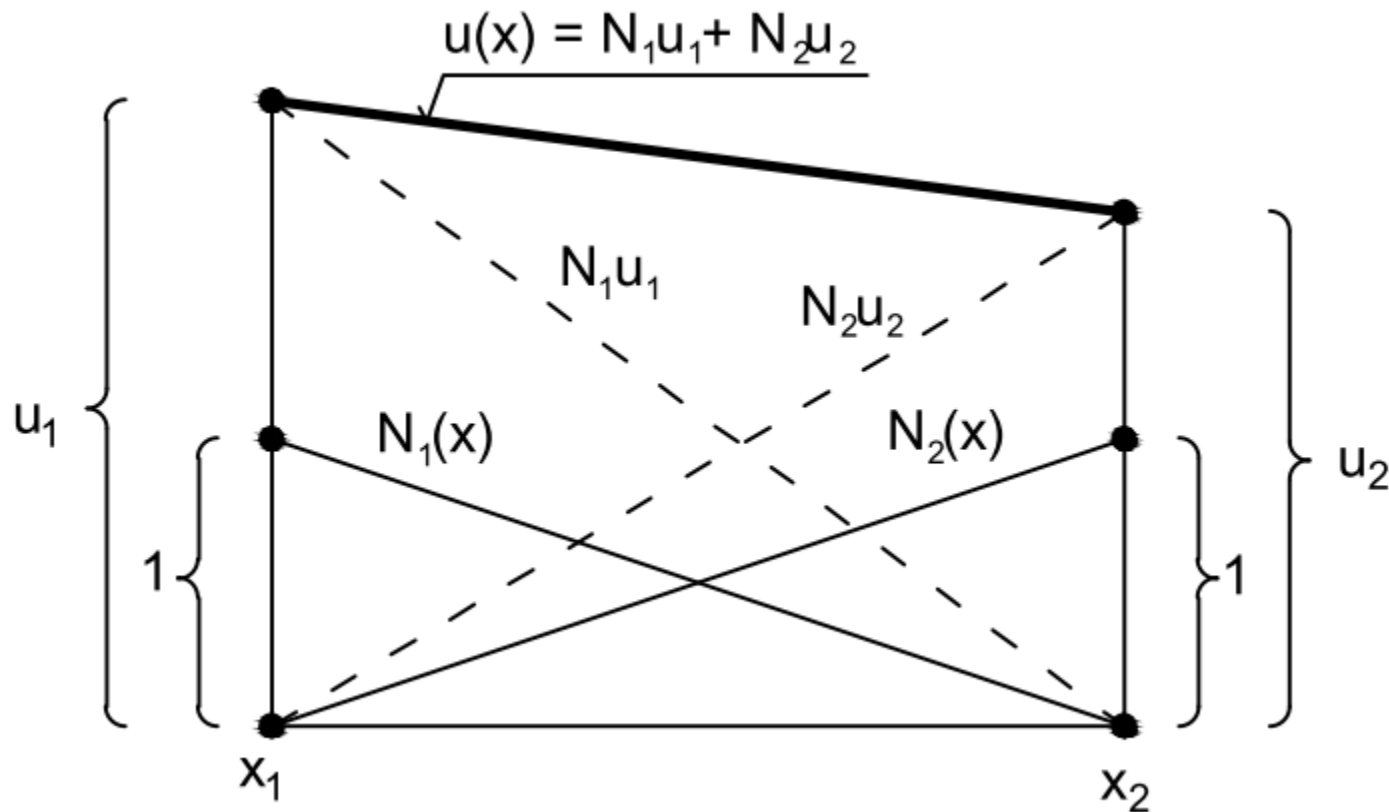
$$u = u_1 \left(\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \right) + u_2 \left(\frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right) = \\ = u_1 N_1^1 + u_2 N_2^1$$

kde N_i^j - bazová funkce odpovídající uzlu i na prvku j

Ověření vlastností bazových funkcí:

$$N_1^1(x_1) = 1, N_1^1(x_2) = 0 \\ N_2^1(x_2) = 1, N_2^1(x_1) = 0$$

Grafické vyjádření významu a tvaru báзовých funkcí:



Analogicky na prvcích č. 2 a 3 budou posuny u aproximovány pomocí neznámých uzlových hodnot v uzlových bodech a známých bázových funkcí následovně:

prvek č. 2:

$$u = u_2 \left(\frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \right) + u_3 \left(\frac{x_2 - x}{x_2 - x_3} \right) = u_2 N_2^2 + u_3 N_3^2$$

prvek č. 3:

$$u = u_3 \left(\frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \right) + u_4 \left(\frac{x_3 - x}{x_3 - x_4} \right) = u_3 N_3^3 + u_4 N_4^3$$

Ověření vlastností bázových funkcí:

$$N_2^2(x_2) = 1, N_2^2(x_3) = 0$$

$$N_3^2(x_3) = 1, N_3^2(x_2) = 0$$

$$N_3^3(x_3) = 1, N_3^3(x_4) = 0$$

$$N_4^3(x_4) = 1, N_4^3(x_3) = 0$$

Vyjádření přetvoření na prutu č. 1 pomocí báзовých funkcí a uzlových parametrů:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left(u_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + u_2 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right) = \\ &= u_1 \left(\frac{1}{x_1 - x_2} \right) + u_2 \left(\frac{-1}{x_1 - x_2} \right) = \frac{1}{x_2 - x_1} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

kde $L_p = (x_2 - x_1)$ je délka prutu

Z těchto vztahů vyplývá, že za předpokladu lineární aproximace posunů na prvku je aproximace přetvoření na prutu konstantní.

Vyjádření napětí na prutu č. 1 pomocí báзовých funkcí a uzlových parametrů:

Předpoklad lineárně pružného chování materiálu (Hookův zákon):

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{E}{L_p} (u_1, u_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tedy za předpokladu lineární aproximace posunů na prvku je napětí na prvku konstantní.

Vyjádření napětí na prutech č. 2 a 3 pomocí báзовých funkcí a uzlových parametrů:

$$\varepsilon = \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Vyjádření napětí na prutech č. 2 a 3 pomocí báзовých funkcí a uzlových parametrů:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{E}{L_p} (u_2, u_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{E}{L_p} (u_3, u_4) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Práce vnitřních sil W_1 a vnějších sil P_1 pro prvek č. 1: $\Pi_1 = W_1 - P_1$

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \sigma \varepsilon S dx = \frac{1}{2} S \int_{x_1}^{x_2} \frac{E}{L_p} (u_1, u_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{L_p} (-1, 1) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} dx = \\ &= \frac{1}{2} S \frac{E}{L_p^2} \int_{x_1}^{x_2} (-u_1 + u_2)(-u_1 + u_2) dx = \frac{SE}{2L_p^2} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) L_p = \\ &= \frac{SE}{2L_p} (u_1^2 - 2u_1u_2 + u_2^2) \end{aligned}$$

Maticový zápis:

$$W_1 = \frac{1}{2} (u_1, u_2) \frac{SE}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (u_1, u_2) K^1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$K^1 = \frac{SE}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad - \text{tzv. lokální matice tuhosti prvku č. 1}$$

Analogicky pro další 2 prvky:

prvek č. 2

$$W_2 = \frac{1}{2}(u_2, u_3) \frac{SE}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(u_2, u_3) K^2 \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

prvek č. 3

$$W_3 = \frac{1}{2}(u_3, u_4) \frac{SE}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(u_3, u_4) K^3 \begin{pmatrix} u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$$

Matice tuhosti všech tří uvažovaných prvků jsou identické a jsou pro přijaté geometrické i materiálové charakteristiky prutu konstantní, tedy

$$K^1 = K^2 = K^3 = \frac{SE}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Potenciál vnějšího zatížení pro prvek č. 1:

$$\begin{aligned} P^1 &= \int_{x_1}^{x_2} u \rho g S dx = \rho g S \int_{x_1}^{x_2} \left(u_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + u_2 \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} \right) dx = \\ &= u_1 \rho g S \frac{1}{2L_p} (x_2 - x_1)^2 + u_2 \rho g S \frac{1}{2L_p} (x_2 - x_1)^2 = \\ &= \frac{1}{2} L_p \rho g S (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(x_2 - x_1) = L_p, \quad g - \text{gravitač. zrychlení}$$

Analogicky potenciál vnějšího zatížení pro prvky č. 2 a 3:

prvek č. 2:

$$\begin{aligned} P^2 &= \int_{x_2}^{x_3} u \rho g S dx = \rho g S \int_{x_2}^{x_3} \left(u_1 \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + u_2 \frac{x_2 - x}{x_2 - x_3} \right) dx = \\ &= u_2 \rho g S \frac{1}{2L_p} (x_3 - x_2)^2 + u_3 \rho g S \frac{1}{2L_p} (x_3 - x_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} L_p \rho g S (u_2, u_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

prvek č. 3:

$$P^3 = \frac{1}{2} L_p \rho g S (u_3, u_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Stanovení celkové potenciální energie nosníku:

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{i=1}^3 W^i - \sum_{i=1}^3 P^i = \frac{1}{2}(u_1, u_2, u_3, u_4) K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho g S L_p (u_1, u_2, u_3, u_4) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (u_1, u_2, u_3, u_4) K \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \rho g S L_p (u_1, u_2, u_3, u_4) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

K – celková (globální) matice tuhosti, získáme ji lokalizací prvků lokálních matic tuhosti prvků dimenze (2x2) do příslušných prvků globální matice tuhosti dimenze (4x4) a následným sečtením

Lokalizace prvků lokálních matic tuhosti do matice globální:

prvek č. 1 určen uzly 1 a 2

$$K^1 = \frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

prvek č. 2 určen uzly 2 a 3

$$K^2 = \frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

prvek č. 3 určen uzly 3 a 4

$$K^3 = \frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

Globální matice tuhosti:

$$K = \sum_{i=1}^3 K^i = \frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplikací Lagrangeova variačního principu na funkcionál celkové potenciální energie Π dostáváme následující soustavu rovnic:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_1} = \frac{1}{2} \frac{ES}{L_p} (2u_1 - 2u_2) - \frac{1}{2} \rho g S L_p = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_2} = \frac{1}{2} \frac{ES}{L_p} (-2u_1 + 4u_2 - 2u_3) - \frac{1}{2} \rho g S L_p 2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_3} = \frac{1}{2} \frac{ES}{L_p} (-2u_2 + 4u_3 - 2u_4) - \frac{1}{2} \rho g S L_p 2 = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_4} = \frac{1}{2} \frac{ES}{L_p} (-2u_3 + 2u_4) - \frac{1}{2} \rho g S L_p = 0$$

Maticový zápis výsledné soustavy rovnic po aplikaci minimalizační podmínky pro funkcionál potenciální energie:

$$\frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zavedení okrajových podmínek úlohy ($u_1=0$ - vetknutí),
tzn. vynechává se první řádek a první sloupec :

$$\frac{ES}{L_p} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \rho g S L_p \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tímto způsobem je zajištěna regularita matice soustavy
a tedy jednoznačnost řešení soustavy.

Řešením soustavy rovnic dostáváme hodnoty posunů v uzlech:

$$u_1 = 0, u_2 = \frac{5}{2} \frac{\rho g L_p^2}{E}, \quad u_3 = 4 \frac{\rho g L_p^2}{E}, \quad u_4 = \frac{9}{2} \frac{\rho g L_p^2}{E}$$

Z Hookova zákona se stanoví napětí na jednotlivých prvcích:

$$\sigma(1) = \frac{E}{L_p} (-u_1 + u_2) = 2.5 \rho g L_p, \quad \sigma(2) = \frac{E}{L_p} (-u_2 + u_3) = 1.5 \rho g L_p, \quad \sigma(3) = \frac{E}{L_p} (-u_2 + u_3) = 0.5 \rho g L_p$$

Analytické řešení úlohy pro stanovení posunů a napětí ve vetknutém nosníku zatíženém pouze vlastní tíhou:

Výchozí diferenciální rovnice:

rovnice rovnováhy:
$$\frac{d\sigma}{dx} + \rho g = 0$$

geometrická rovnice:
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Hookův zákon:
$$\sigma = E\varepsilon$$

Dosadíme z geometrické rovnice do Hookova zákona a získané přetvoření pak do rovnice rovnováhy:

$$\sigma = E \frac{du}{dx} \Rightarrow E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho g = 0$$

Okrajové podmínky úlohy:

$$u(x=0)=0 \text{ (vetknutí)}$$

$$\frac{du}{dx}(pro\ x = L) = 0 \quad (\text{změna posunu } u \text{ na konci nosníku je nulová})$$

Řešení homogenní diferenciální rovnice:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -\frac{\rho g}{E} \rightarrow \text{integrate} \rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{\rho g}{E}x + c_1 \rightarrow \text{integrate} \rightarrow u = -\frac{\rho g}{E} \frac{x^2}{2} + c_1x + c_2$$

Určení konstant z okrajových podmínek:

$$u(0) = 0 = c_2$$

$$\frac{du}{dx}(x=L) = -\frac{\rho g L}{E} + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = \frac{\rho g L}{E}$$

Celkové řešení má tedy tvar
parabolický:

$$u(x) = -\frac{\rho g}{E} \frac{x^2}{2} + \frac{\rho g L}{E} x = \frac{\rho g}{E} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

Výpočet odpovídající funkce napětí:

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} = E \frac{\rho g}{E} (L - x) = \rho g (L - x)$$

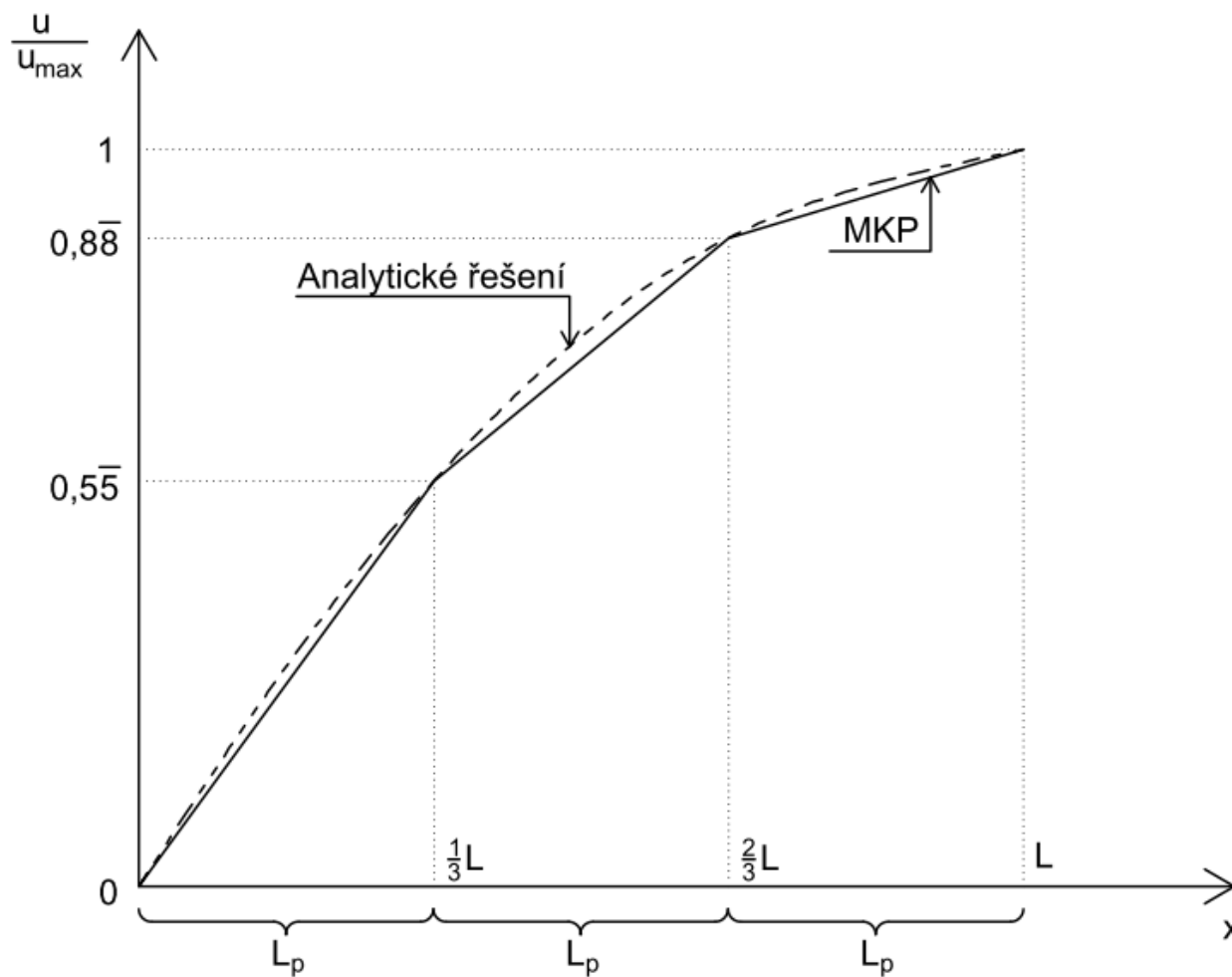
Napětí má lineární průběh.

Srovnání analytického a numerického řešení

Srovnání posunů v uzlových bodech:

uzel	x	Analytické řešení	Numerické řešení
1	0	$u(x=0)=0$	$u_1=0$
2	L_p	$u(x=L_p)=\frac{\rho g}{E}\left(3L_pL_p-\frac{L_p^2}{2}\right)=\frac{\rho g}{E}\left(\frac{5}{2}L_p^2\right)$	$u_2=\frac{5}{2}\frac{\rho gL_p^2}{E}$
3	$2L_p$	$u(x=2L_p)=\frac{\rho g}{E}\left(3L_p2L_p-\frac{4L_p^2}{2}\right)=\frac{\rho g}{E}(4L_p^2)$	$u_2=4\frac{\rho gL_p^2}{E}$
4	$3L_p$	$u(x=3L_p)=\frac{\rho g}{E}\left(3L_p3L_p-\frac{9L_p^2}{2}\right)=\frac{\rho g}{E}\left(\frac{9}{2}L_p^2\right)$	$u_2=\frac{9}{2}\frac{\rho gL_p^2}{E}$

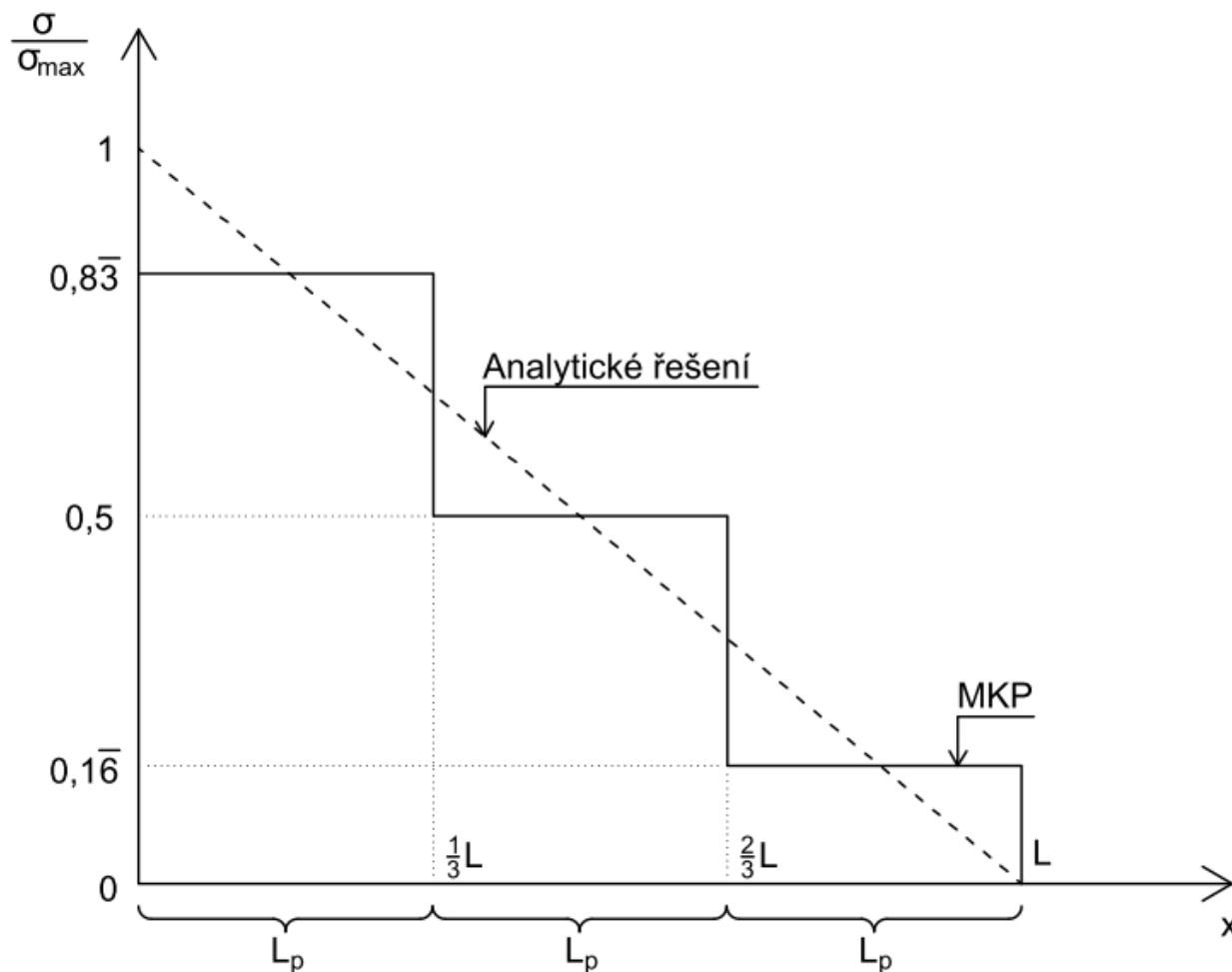
Posuny na prvcích grafické srovnání analytického a numerického řešení



Srovnání napětí na prvcích:

prvek	Rozsah prvku	Analytické řešení	Numerické řešení
1	0-L _p	$\sigma(x = L_p) = \rho g(3L_p - L_p) = 2\rho gL_p$	$\sigma(1) = 2.5\rho gL_p,$
2	L _p -2L _p	$\sigma(x = 2L_p) = \rho g(3L_p - 2L_p) = \rho gL_p$	$\sigma(2) = 1.5\rho gL_p,$
3	2L _p -3L _p	$\sigma(x = 3L_p) = \rho g(3L_p - 3L_p) = 0$	$\sigma(3) = 0.5\rho gL_p,$

Napětí v prvcích grafické srovnání analytického a numerického řešení



Srovnání analytického a numerického řešení -závěry

- v uzlech odpovídá analytické řešení hodnotám výsledků řešení numerického, uvnitř prvků jsou numericky stanovené posuny nižší – metoda konečných prvků je obecně „tužší“ .
- napětí na prvcích mají vzhledem k předpokladu lineární aproximační funkce po částech konstantní průběh
- průběh posunů mezi prvky je spojitý

- napětí mají nespojitý průběh mezi prvky, obvykle jsou následně průměrována
- z porovnání výsledků vyplývá nutnost volit jemnější síť a vyšší stupeň aproximace posunů pro dosažení vyšší přesnosti numerických výpočtů, a to zejména u stabilitních výpočtů, kde jsou výsledky napětí rozhodující