INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika
Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Typy konečných prvků

(výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

Typ konečných prvků a počet uzlových bodů souvisí s volbou typu aproximační funkce na prvku, která je determinována následujícími základními faktory:

•Požadovaná přesnost řešení

•Typ řešené úlohy – deformační nebo stabilitní, pro stabilitní úlohy (určující jsou napětí) se doporučují aproximační funkce vyšších řádů

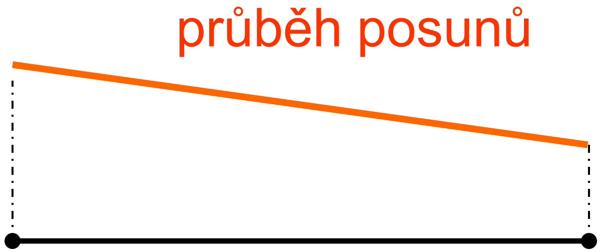
•Požadavky na vystižení geometrie vnějších i vnitřních hranic modelu

•Výkonnost výpočetní techniky (kapacita paměti, disku)

Vyšší počet uzlových bodů umožňuje zpřesnit řešení, avšak představuje zvýšení dimenze soustavy rovnic, vyšší nároky na výpočetní čas, kapacitu operační paměti i disku, …

PRUTOVÉ PRVKY (PRVKY 1D)

Nejjednodušší prvek v jedné dimenzi – prut s uzlovými body v krajních bodech prutu, tomuto prvku odpovídá lineární aproximace posunů na tomto prvku a konstantní průběh poměrného přetvoření a napětí na tomto prvku, matici tuhosti lze stanovit analyticky



Metoda konečných prvků – Typy konečných prvků

Nejčastěji používaný prvek v rovině : trojúhelník s uzlovými body:

- ve vrcholech trojúhelníka (nejjednodušší prvek v rovině) (3 uzlový prvek) – aproximace posunů na prvku je lineární, není příliš přesný, nevystihuje zejména lokální extrémy deformací ani napětí, ve většině komerčních softwarů se nevyužívá

- ve vrcholech trojúhelníka a ve středech stran (6-ti uzlový prvek) – aproximace funkce posunů na prvku je polynomem 2. řádu, dostatečná přesnost v případě deformační analýzy, pro stabilitní analýzu nepřesný

- ve vrcholech trojúhelníka, ve středech stran i uvnitř trojúhelníka (15-ti uzlový prvek) – aproximace funkce posunů na prvku polynomem 3. řádu, doporučuje se především v případě napěťové analýzy (stabilitní úlohy, vyhodnocení čerpání smykové pevnosti apod.)

Testovací analýza vlivu typu prvků na výsledky deformačního a stabilitního výpočtu metodou konečných prvků

Testovací úloha vlivu velikosti modelu na výsledky řešení (Plaxis 2D):

nevyztužené dílo kruhového příčného průřezu o poloměru r= 5 m

výška nadloží: h= 5 m

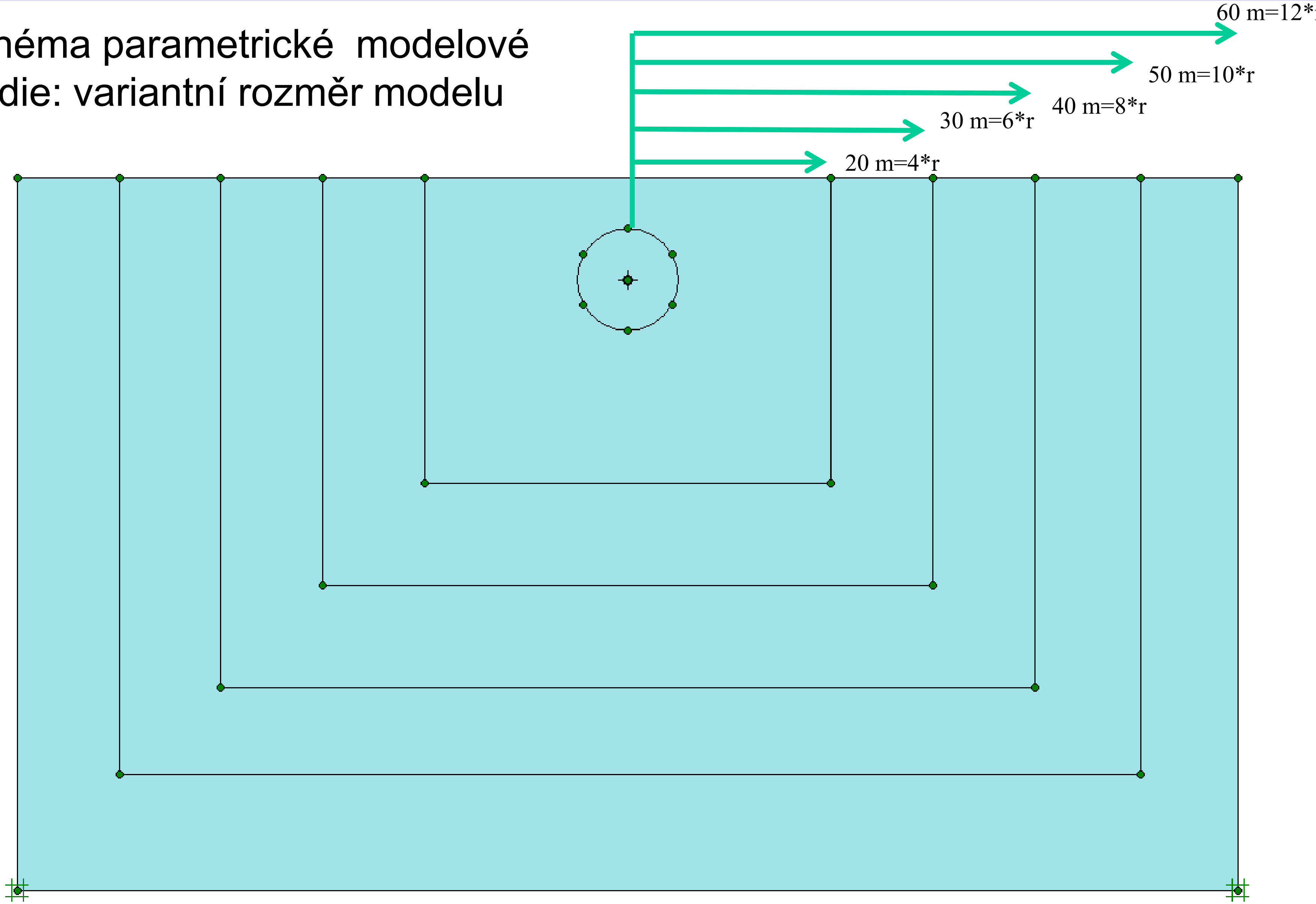
Objemová tíha okolní horniny: γ= 20 kN/m^3 (homogenní prostředí)

Modul pružnosti okolního prostředí: E=20 MPa

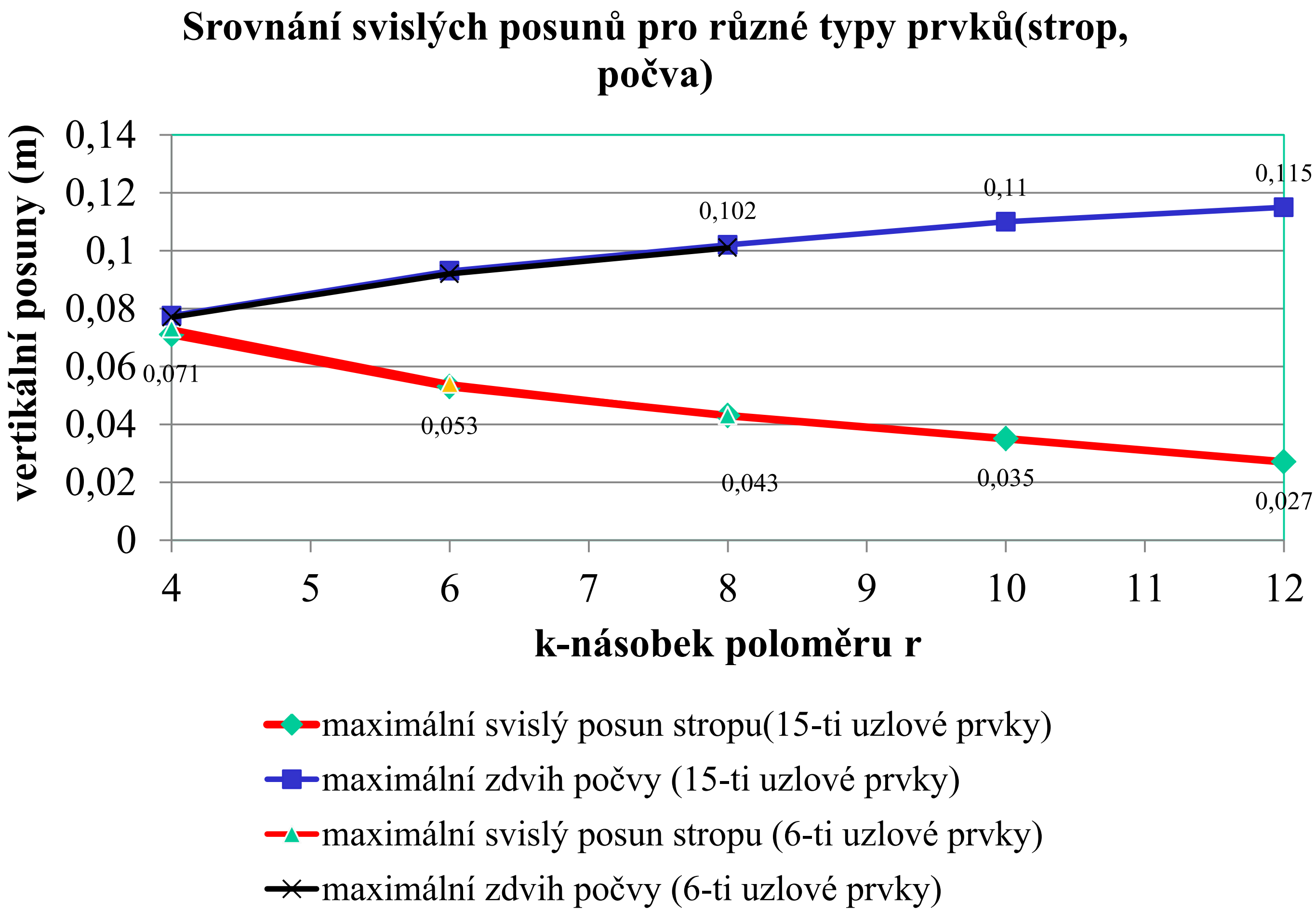
Materiálový model: lineárně pružný

Variantní rozměry modelu: vzdálenost bočních svislých hranic a spodní hranice od středu díla vždy v k-násobcích poloměru díla (k=4,6,8,10,12)

Schéma parametrické modelové studie: variantní rozměr modelu

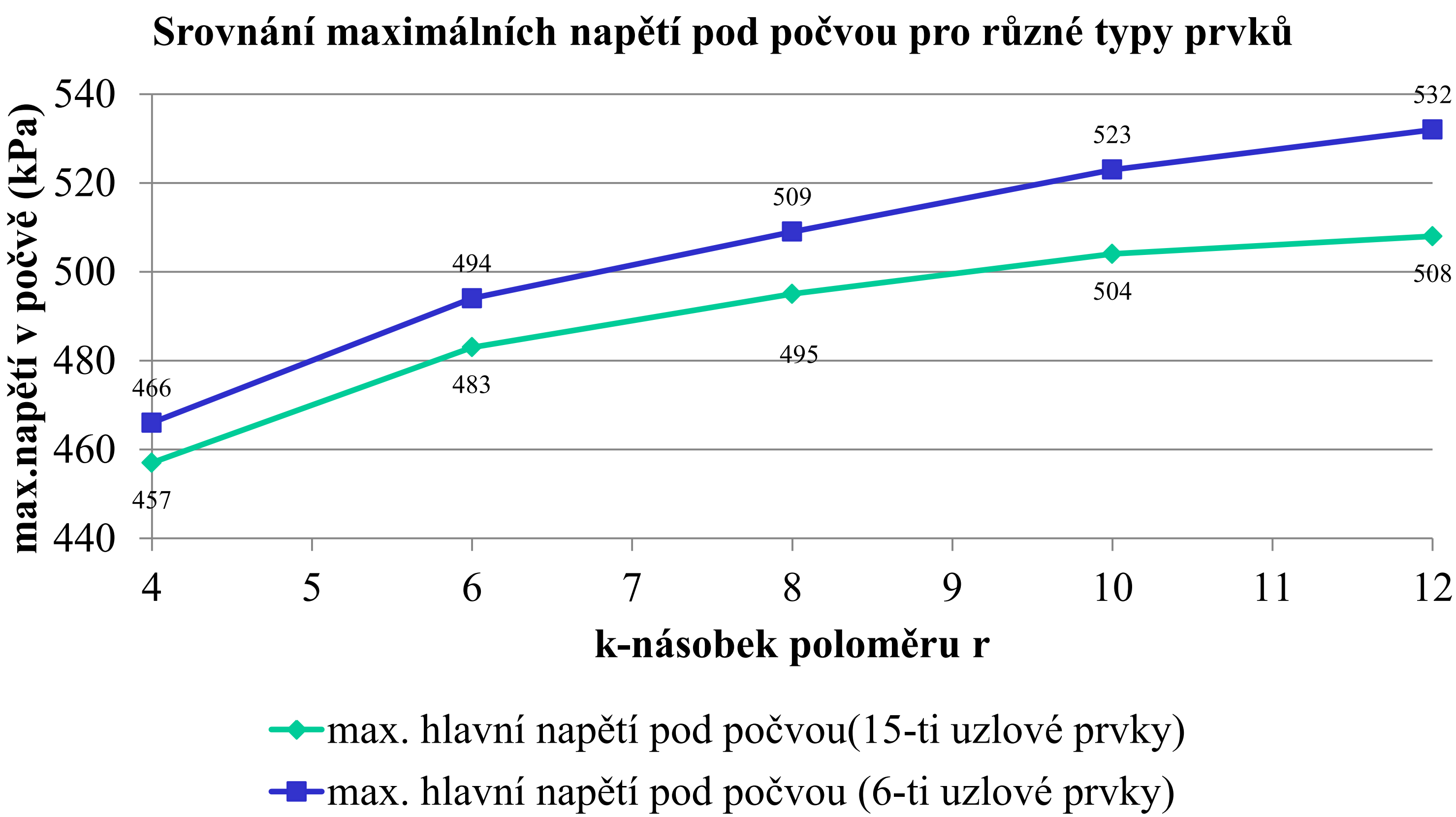


Metoda konečných prvků – Typy konečných prvků



Posuny pro oba typy trojúhelníkových prvků (6-ti i 15-ti uzlové) jsou posuny identické

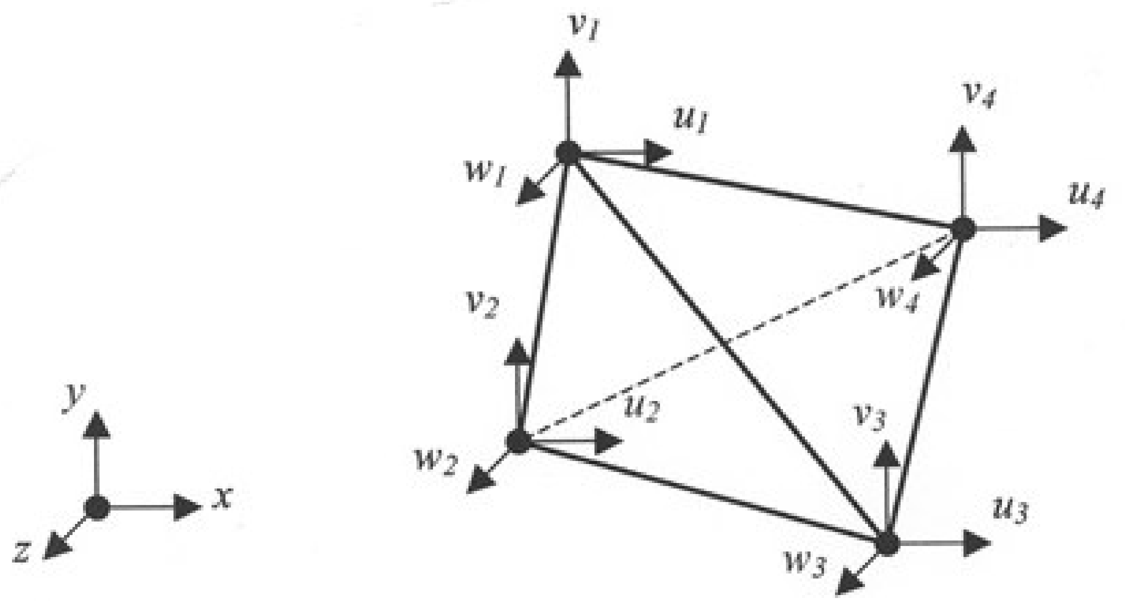
Metoda konečných prvků – Typy konečných prvků



Maximální napětí kolem díla (v počvě) je pro různé prvky rozdílné

Nejjednodušší prvek v prostoru - prostorový čtyřstěn (tetraedr) s uzlovými body v jeho vrcholech

4 uzly – v každém uzlu 3 složky posunů(u,w,v)



Celkem tedy přísluší každému prostorovému prvku tohoto typu 12 uzlových parametrů

Vektor uzlových parametrů 1 prostorového prvku

$$\vec{\delta} = \left(u_1, w_1, v_1, u_2, w_2, v_2, u_3, w_3, v_3, u_4, w_4, v_4\right)^T$$

Tři složky posunů na prvku *u,w,v* jsou aproximovány lineární funkcí tří prostorových souřadnic.

$$u(x, y, z) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 z$$

$$w(x, y, z) = a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 z$$

$$v(x, y, z) = a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} z$$

12 neznámých konstant je určeno uzlovými parametry ve 4 vrcholech čtyřstěnu

Stejně jako v případě trojúhelníkového prvku vyjádříme příslušné bázové funkce N_1^m, N_2^m, N_3^m, N_4^m příslušející daným uzlům *1,2,3,4* v daném prvku *m*.

Pak tedy dostáváme průběh posunů *u, w, v* na prvku m vyjádřený pomocí bázových funkcí a uzlových hodnot na daném prvku:

$$u(x, y, z) = N_1^m u_1 + N_2^m u_2 + N_3^m u_3 + N_4^m u_4$$
$$w(x, y, z) = N_1^m w_1 + N_2^m w_2 + N_3^m w_3 + N_4^m w_4$$
$$v(x, y, z) = N_1^m v_1 + N_2^m v_2 + N_3^m v_3 + N_4^m v_4$$

Vzhledem k linearitě aproximační funkce plyne z geometrických rovnic konstantní průběh poměrných přetvoření ε a napětí σ na daném prvku .

$$\vec{\varepsilon} = \left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\right)^T$$

$$\vec{\sigma} = \left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right)^T$$

Matici tuhosti lze v tomto případě analyticky integrovat:

$$K^m = \iiint_V \left(A_m^{-1}\right)^T B^T D_m A_m^{-1} t_m dV = \left(A_m^{-1}\right)^T B^T D_m A_m^{-1} V$$

V – objem prvku

Tento nejjednodušší prostorový prvek není sice příliš přesný, ale tento tvar se ukázal jako nejvýhodnější pro plně automatické generování sítě konečných prvků tvarově složitých objemů.

Doporučuje se však použít čtyřstěny s vyšším počtem uzlových bodů, které umožňují aproximovat průběhy posunů aproximačním i funkcemi vyšších řádů (ty ovšem vyžadují numerickou derivaci matice tuhosti).

Izoparametrické prvky

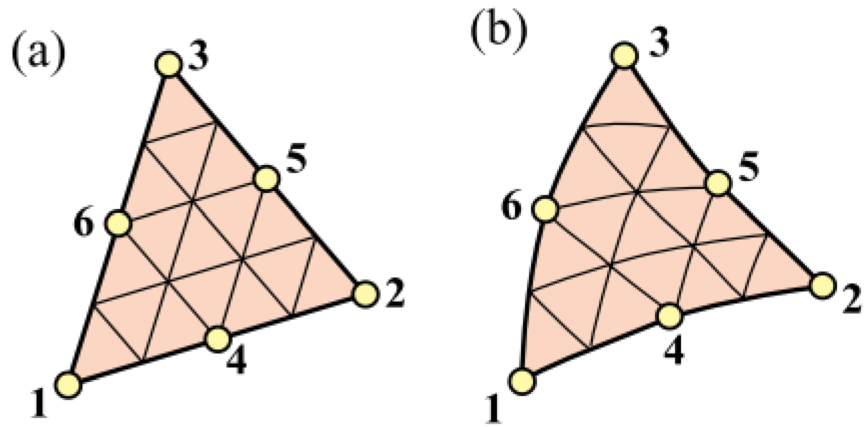
•Geometricky se obecně jedná se o prvky se zakřivenými hranami(varianty pro 1D úlohu, rovinnou i prostorovou úlohu), kdy je geometrie prvku popsána analogickým polynomem jako hledané pole posunů.

•Polynom má tedy stejný počet parametrů – odtud název izoparametrický.

•Hranice izoparametrických prvků jsou obecně zakřivené

•I obyčejný prutový prvek, trojúhelníkový prvek a čtyřstěn s přímými nezakřivenými hranicemi mohou být považovány za izoparametrické prvky.

Izoparametrický trojúhelníkový prvek

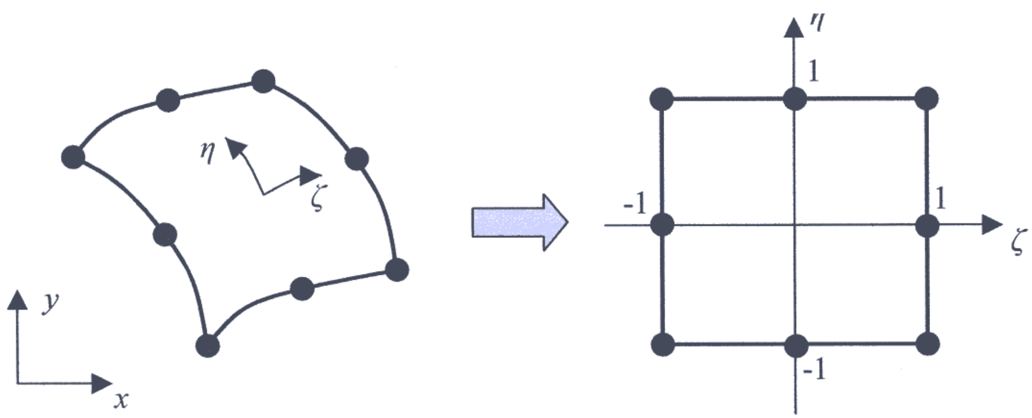


a) Trojúhelníkový prvek s přímými hranami

b) Odpovídající izoparametrický prvek

Transformace izoparametrických prvků

U těchto tvarů zakřivených prvků se s výhodou využívá transformace geometrie z kartézského systému souřadnic x, y na tzv. jednotkový prvek v přirozeném souřadném systému křivočarých souřadnic ξ,η



(analogie přechodu na polární souřadnice při integraci kruhu)

Po této transformaci se podstatně zjednoduší integrační meze v integrálu pro vyhodnocení odpovídající matice tuhosti, ale potřebujeme stanovit tyto transformační vztahy mezi kartézskými a přirozenými souřadnicemi ξ,η:

$$x = x(\xi,\eta), \quad y = y(\xi,\eta)$$

Pak pro integraci matice tuhosti platí:

$$K^m = \int\int \left(A_m^{-1}\right)^T B^T D_m A_m^{-1} t_m d\Omega_m = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(A_m^{-1}\right)^T B^T D_m A_m^{-1} t_m \det J d\xi d\eta$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\delta x}{\delta \xi} & \dfrac{\delta x}{\delta \eta} \\ \dfrac{\delta y}{\delta \xi} & \dfrac{\delta y}{\delta \eta} \end{pmatrix}$$

J – Jakobián transformace

Bázové funkce jsou pak formulovány přímo v přirozeném souřadném systému a funkce posunů na prvku lze pak psát ve tvaru :

$$u(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)u_i$$

$$v(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n} N_i(\xi,\eta)v_i$$

Pro transformační vztahy pak platí:

$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n} \widetilde{N}_i(\xi,\eta)x_i$$

podmínka pro izoparametrický prvek

$$y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{n} \widetilde{N}_i(\xi,\eta)y_i \quad kde \quad \widetilde{N}_i(\xi,\eta)=N_i(\xi,\eta)$$

jedná se o izoparametrický prvek