



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika

Reg. č. CZ.1.07/2.2.00/28.0009

Metoda konečných prvků – Numerická integrace

(výuková prezentace pro 1. ročník navazujícího studijního oboru Geotechnika)

Doc. RNDr. Eva Hruběšová, Ph.D.

Základy numerické integrace pro vyjádření matice tuhosti

Gaussova integrace – metoda numerické integrace, spočívající v převedení výpočtu integrálu na součet vhodným kvadraturním vzorcem s využitím určitého počtu integračních bodů.

Počet a pozice integračních bodů v prvku vyplývá z geometrie prvku a z řádu interpolační funkce – cílem je dosažení co nejvyšší přesnosti integrace.

Základní vztahy pro numerickou integraci

1D(úsečka):
$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{p=1}^n w_p f(\xi_p)$$

2D(čtverec):
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n w_p w_q f(\xi_p, \eta_q)$$

3D(krychle):
$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \chi) d\xi d\eta d\chi = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n w_p w_q w_r f(\xi_p, \eta_q, \chi_r)$$

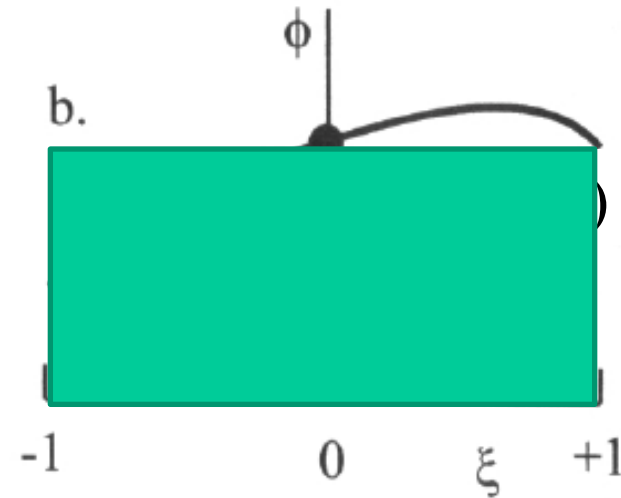
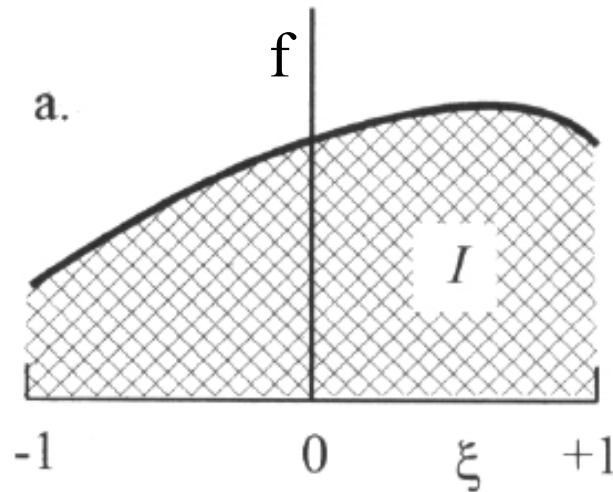
n – počet Gaussových integračních bodů, v nichž vyčísľujeme integrovanou funkci (tzv. řád Gaussovy integrace)

w_p, w_q, w_r – váhové funkce daného bodu

ξ, η, χ – křivkové souřadnice ve vyjádření izoparametrických prvků

Jednorozměrný integrál

přesná hodnota integrálu



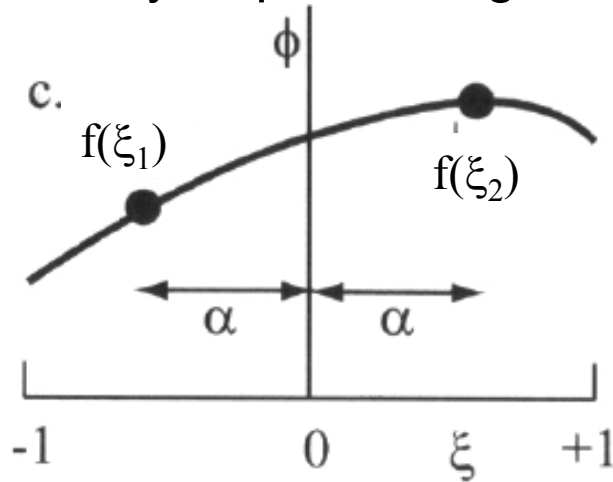
volba jediného interpolačního bodu(počátku)
pro výpočet integrálu by vedla k vyjádření:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx 2 f(0)$$

Tato volba jediného interpolačního bodu by tedy byla vhodná pouze
v případě lineární funkce f .

Metoda konečných prvků – Numerická integrace

V ostatních případech je nutno volit vyšší řád interpolační funkce, jemuž odpovídá i vyšší počet integračních bodů.

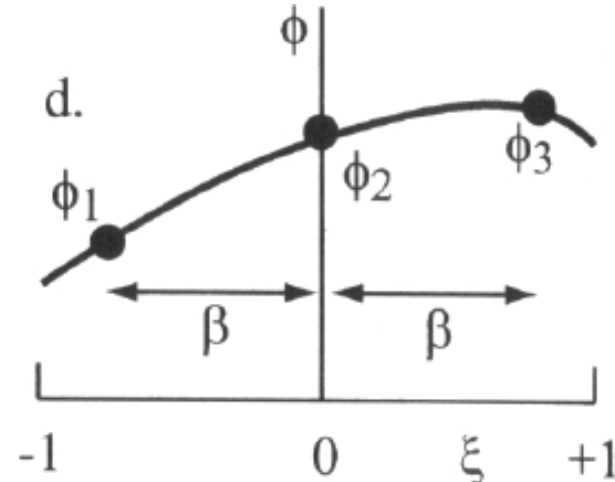


$$I = f(\xi_1) + f(\xi_2)$$

int. body: $\xi_1 = -0.577, \xi_2 = 0.577$

váhy bodů: $w_1 = w_2 = 1$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$I = 0.555 f(\xi_1) + 0.889 f(\xi_2) + 0.555 f(\xi_3)$$

$\xi_1 = -0.774, \xi_2 = 0, \xi_3 = 0.774$

$w_1 = w_3 = 0.555, w_2 = 0.889$

$$\beta = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Metoda konečných prvků – Numerická integrace

Souřadnice a váhy integračních bodů při Gaussově integraci v 1D

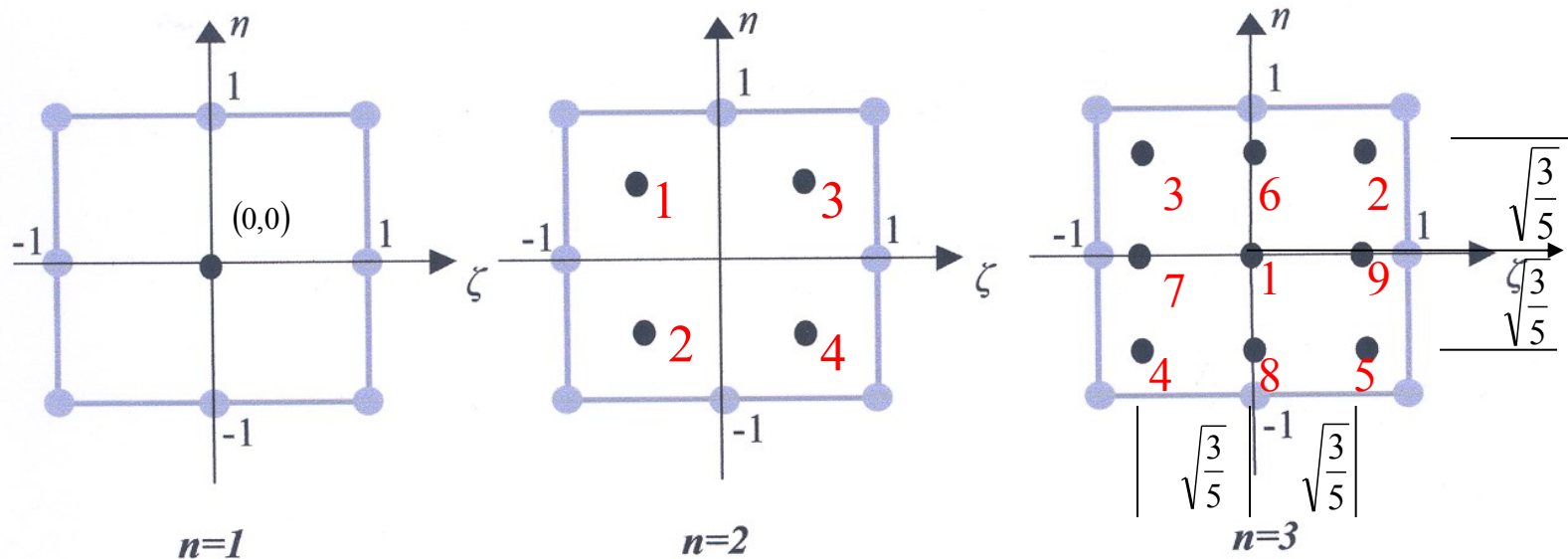
řád integrace n	souřadnice ζ_i	váha w_i
1	0,000	2,000
2	$\pm 0,577$	1,000
3	$\pm 0,774$	0,555
	0,000	0,889
4	$\pm 0,861$	0,348
	$\pm 0,340$	0,652

Gaussova integrace pro vyčíslení matice tuhosti rovinného prvku

$$\begin{aligned} K^m &= \int \int_{\Omega_m} \left(A_m^{-1} \right)^T B_m^T D_m B_m A_m^{-1} t_m d\Omega_m = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(A_m^{-1} \right)^T B_m^T D_m B_m A_m^{-1} t_m \det J d\xi d\eta = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \left(A_m^{-1} \right)^T B_m^T \left(\xi_i, \eta_j \right) D_m B_m \left(\xi_i, \eta_j \right) A_m^{-1} t_m \det J \end{aligned}$$

w_i, w_j – váhové funkce odpovídající zvoleným Gaussovým bodům v prvku m

Lokalizace Gaussových integračních bodů ve čtvercovém prvku



Vyčíslení integrálu funkce na čtvercovém prvku

$$n=1: \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s,t) \, ds dt \approx 4f(0,0)$$

$$n=2: \quad I = \sum_{i=1}^4 f(i), \quad w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 1$$

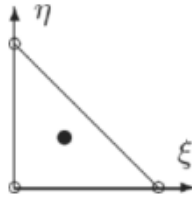
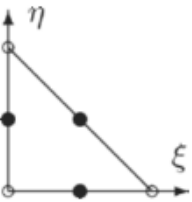
$$n=3: \quad I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s,t) \, ds dt \approx \sum_{i=1}^9 w_i f(i)$$

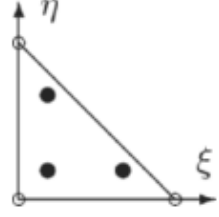
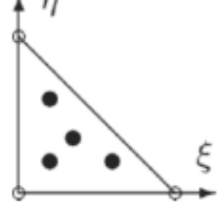
$$w_1 = \frac{64}{81},$$

$$w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = \frac{25}{81}$$

$$w_6 = w_7 = w_8 = w_9 = \frac{40}{81}$$

Lokalizace Gaussových bodů a odpovídající váhy pro trojúhelníkový prvek

m	n_p	p	ξ_p	η_p	W_p	Poloha bodů	s
1	1	1	1/3	1/3	1/2		
2	3	1	1/2	1/2	1/6		
		2	0	1/2	1/6		
		3	1/2	0	1/6		

2	3	1	1/6	1/6	1/6		
		2	2/3	1/6	1/6		
		3	1/6	2/3	1/6		
3	4	1	1/3	1/3	-27/96		
		2	1/5	1/5	25/96		
		3	3/5	1/5	25/96		
		4	1/5	3/5	25/96		

n -řád integrace, n_p – počet Gaussových bodů, p -poloha bodu, ξ_p, η_p – souřadnice bodů, W_p – váha bodu

Čím vyšší řád integrace, tím přesnější aproximace integrace, ale současně se zvyšuje množství operací potřebných pro sestavení matic tuhosti, protože musíme provádět vyčíslování v mnohem větším počtu integračních bodů.

Počet integračních bodů při vyčíslení lokálních matic tuhosti
v závislosti na dimenzi úlohy a řádu integrace

řád integrace n	počet integračních bodů podle dimenze prvku		
	1D	2D	3D
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27
4	4	16	64