



Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Konstitutivní modelování
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Konstitutivní materiálový model – popisuje chování materiálu, udává obecně vztah mezi deformací (přetvořením) materiálu a jeho stavovými veličinami.

Stavové veličiny materiálu jsou proměnné charakterizující stav materiálu a patří mezi ně např. napětí, číslo pórovitosti, stupeň nasycení, teplota apod.

Parametry materiálu - na rozdíl od stavových proměnných se jedná o konstanty (např. Youngův modul pružnosti, Poissonovo číslo, úhel vnitřního tření apod.)

Konstitutivní model nejčastěji definuje vztah mezi přetvořením a napětím.

- Stanovení vhodného konstitutivního modelu chování materiálu je nejdůležitější, ale současně i nejobtížnější část tvorby matematického modelu.
- Tato skutečnost je aktuální především v případě horninových resp. zeminových materiálů, u nichž je objektivní a výstižný popis chování dosti komplikovaným problémem. Tato komplikovanost vyplývá především z vícefázového charakteru těchto materiálů – zemina je obecně třífázový systém (zeminová zrna, vzduch, voda), který je navíc proměnný v čase.

Gudehus (1985): „Soil seems to defeat its investigators again and again“

Savage : „ One of the central problems of research in granular materials is development of continuum equation“

Obecný zápis konstitutivního modelu:

$$\Delta \vec{\sigma} = D \Delta \vec{\varepsilon}$$

$$\Delta \vec{\varepsilon} = D^{-1} \Delta \vec{\sigma} = C \Delta \vec{\sigma}$$

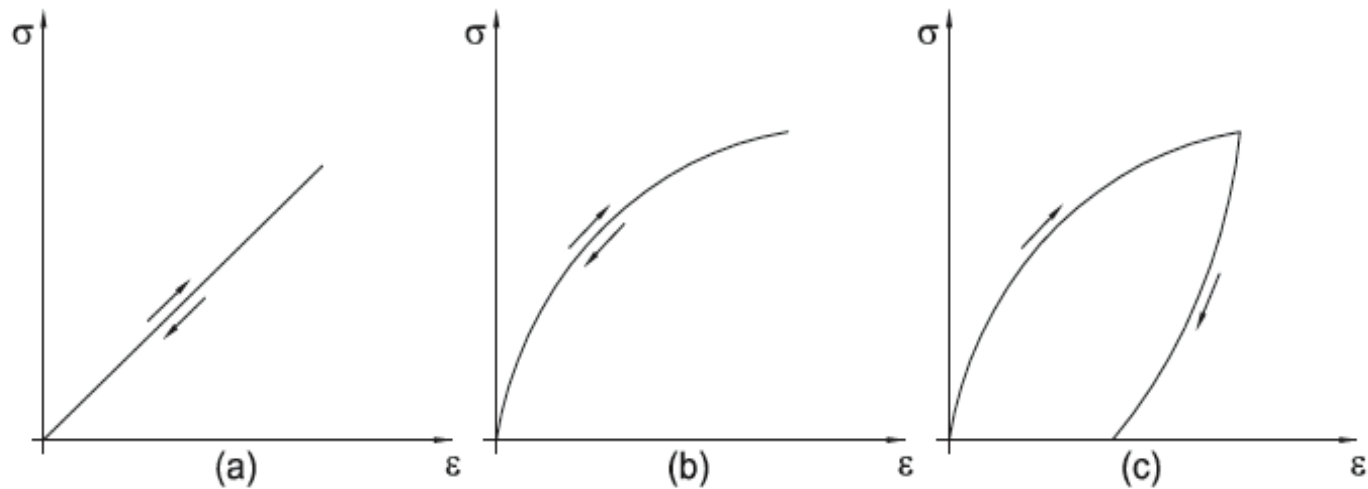
$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_y, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy})^T$$

$$\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy})^T$$

D.... matice tuhosti, $D^{-1}=C$.. matice poddajnosti

Různé typy konstitutivních modelů se pak liší obecně tím, zda matice tuhosti D závisí na přírůstku deformace $\Delta \varepsilon$ a na stavových proměnných.

Idealizované základní modely chování látek

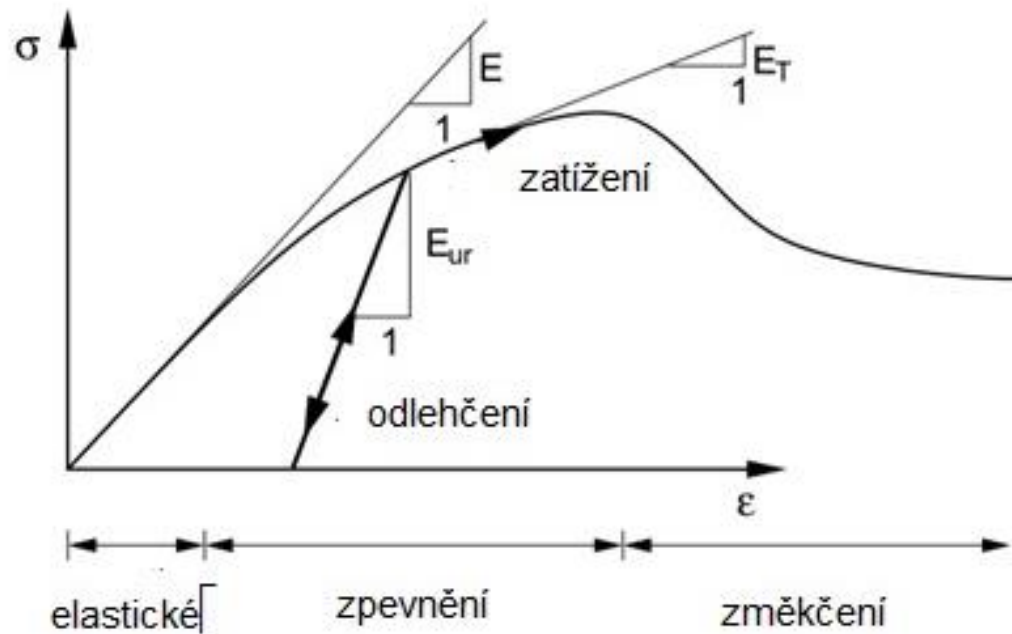


- a) Lineárně – pružné chování
- b) Nelineárně pružné chování
- c) Plastické chování

Ze zkoušek chování zemin obecně vyplývá:

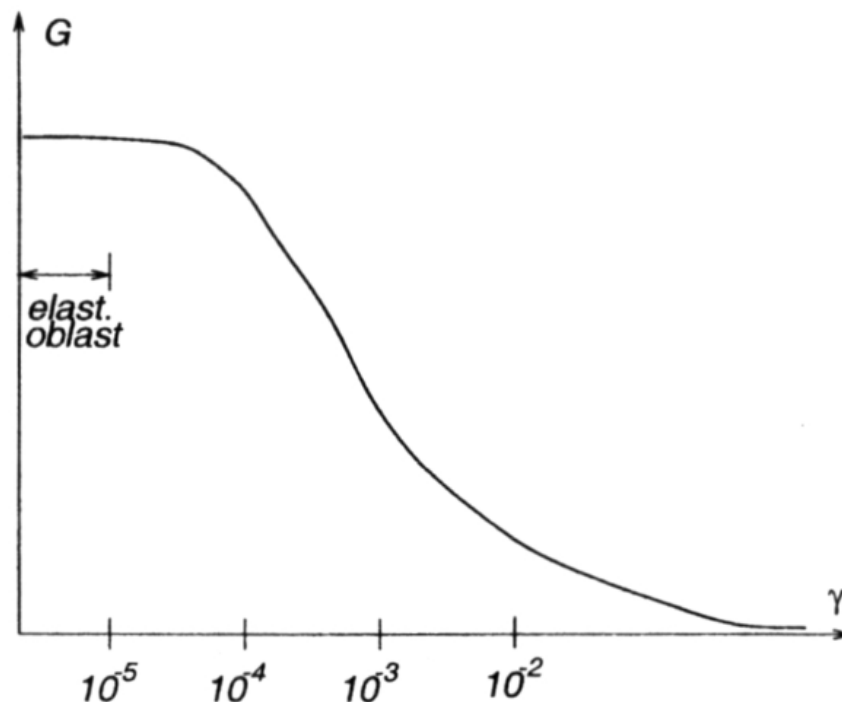
- Deformační chování zemin je, mimo jiné, ovlivněno napětím a pórovitostí.
- V oboru malých přetvoření je chování zemin výrazně nelineární (tuhost je závislá na přetvoření)
- Závislost tuhosti zemin i na napětí
- Závislost chování zemin i na historii zatěžování a přetváření

Reálný materiálový model chování zemin



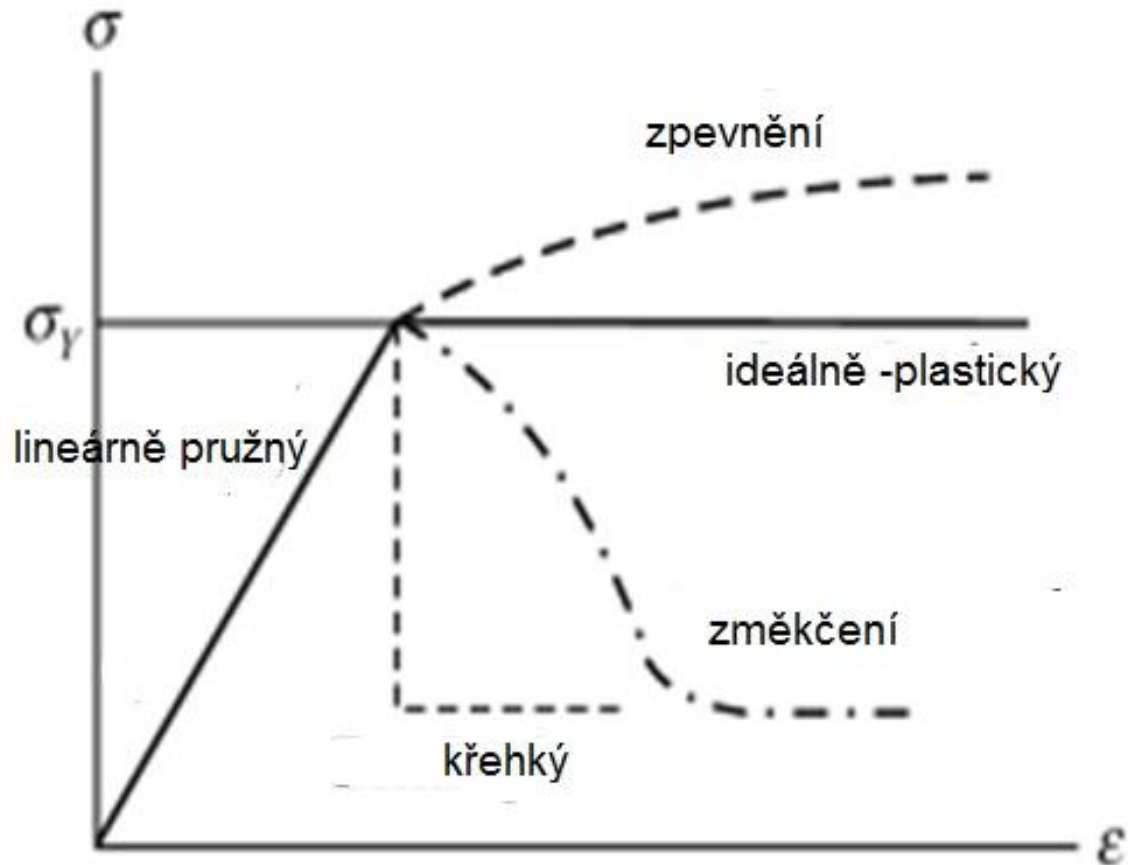
Každý druh materiálu (tedy i horninového) má určitý specifický model chování, ve kterém může převládat pružná či plastická složka.

V oboru velmi malých přetvoření (řádově 10^{-3} %) lze považovat přetvoření za vratná, při větších přetvořeních je nutno již obvykle uvažovat i s nevratnými (plastickými) přetvořeními. Se zvětšujícím se přetvořením navíc klesá tuhost.



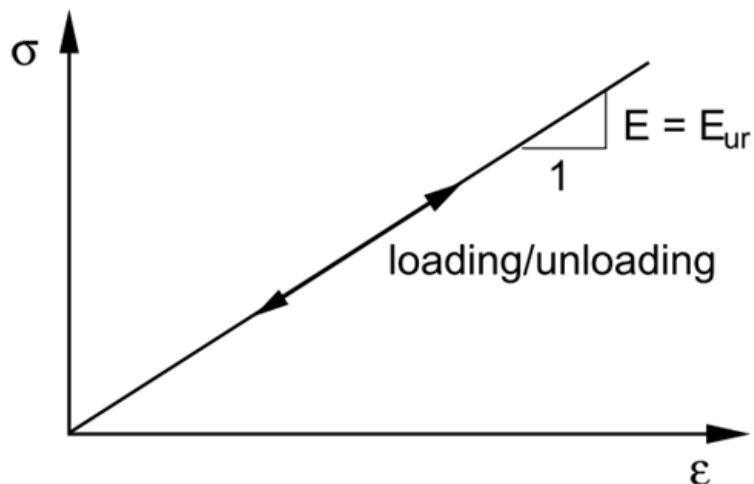
(zdroj: Mašín)

Přehled základních idealizovaných modelů chování zeminových materiálů



Lineárně pružný (linear elastic) konstitutivní model

- lineární vztah mezi napětím a přetvořením daný Hookovým zákonem, přetvoření jsou vratná (elastická)
- model neuvažuje žádné stavové proměnné - matice tuhosti D tedy závisí pouze na dvou materiálových parametrech (Youngův modul pružnosti a Poissonovo číslo), moduly při zatěžování E a odlehčování E_{ur} jsou identické



Lineárně pružný (linear elastic) konstitutivní model

- je základem konstitutivního modelování
- nejjednodušší konstitutivní model, který nevystihuje zcela chování zemin při větších přetvořeních
- neumožňuje vyhodnotit porušení (nedefinuje žádnou podmínku pro plastické chování)
- nezohledňuje nelinearitu
- nezohledňuje závislost tuhosti na napětí
- nezohledňuje vliv pórovitosti

Lineárně pružný (linear elastic) konstitutivní model

- dobře simuluje chování zemin při velmi malých přetvořeních (např. v případě dynamických úloh)
- využívá se často pro modelování konstrukčních betonových nebo ocelových částí modelu
- lze jej s výhodou využít pro srovnání numerických modelů s modely analytickými, které jsou často založeny na předpokladu lineárně pružného přetváření

Lineárně izotropně pružný konstitutivní model

- Lineárně izotropní pružnost – materiál má ve všech směrech stejné vlastnosti
- model je charakterizován pouze dvěma materiálovými parametry – Youngovým modulem pružnosti a Poissonovým číslem. Tyto dva základní parametry lze získat rovněž na základě zadaného smykového modulu pružnosti G a objemového modulu pružnosti K :

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Lamého konstanta λ je pak definována:

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} = K - \frac{2}{3}G$$

Lineárně pružný model je charakterizován rozšířeným Hookovým zákonem

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu(\sigma_y + \sigma_x))$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}$$

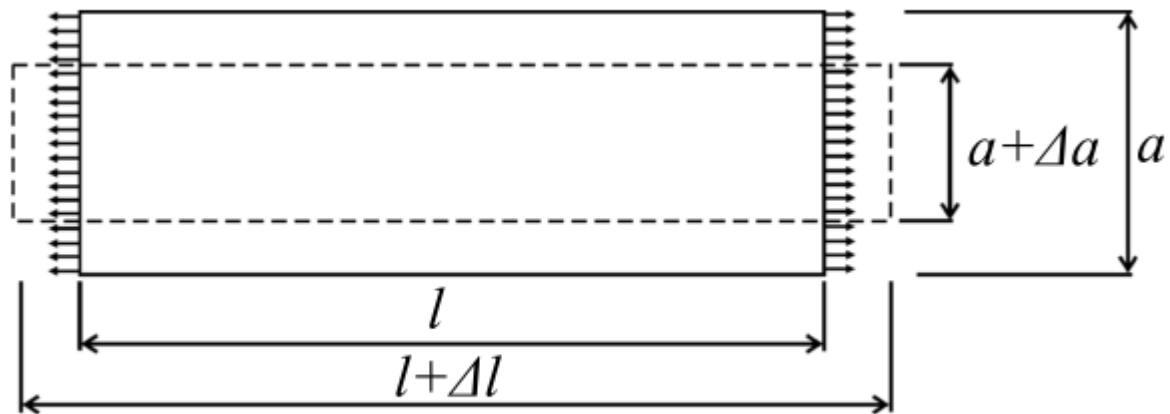
$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Za předpokladu lineární závislosti mezi napětím a přetvořením má tedy matice $C=D^{-1}$ tvar:

$$\frac{1}{E} \begin{pmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{pmatrix}$$

Význam Poissonova čísla

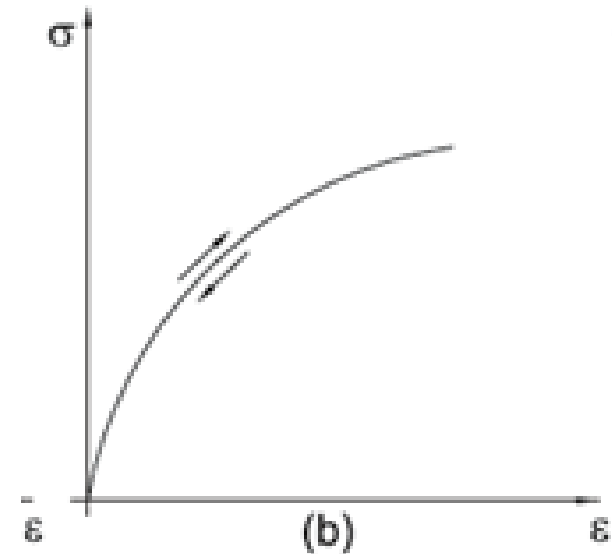


$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_p = \frac{\Delta a}{a},$$

$$\varepsilon_p = \mu \varepsilon_l \Rightarrow \mu = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_l}$$

Nelineárně pružný model

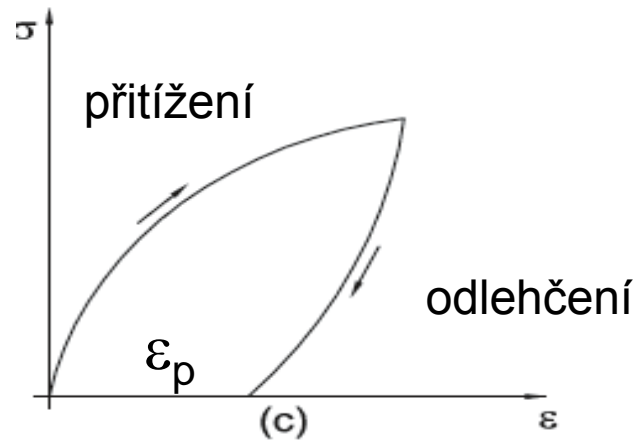
- model předpokládá stejně jako v případě lineárně pružného modelu pouze pružná přetvoření
- na rozdíl od lineárně pružného modelu však model zohledňuje závislost modulů (tuhosti) na napětí
- tento typ modelů však zohledňuje pouze zatěžovací větve pracovního diagramu a jeho vypovídací schopnost pro stavy s odlehčením je nižší, výsledky mohou být nerealistické
- mezi tento typ konstitutivních modelů patří např. Duncan- Changův model (1970) – předpoklad hyperbolické závislosti napětí na přetvoření



Pružně - plastické konstitutivní modely

Předpokládají rozdělení deformací na pružnou (vratnou) ε_e a plastickou (nevratnou) ε_p složku, tj. celkové přetvoření ε

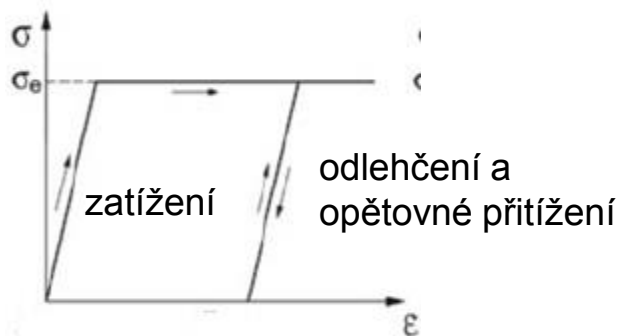
$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$



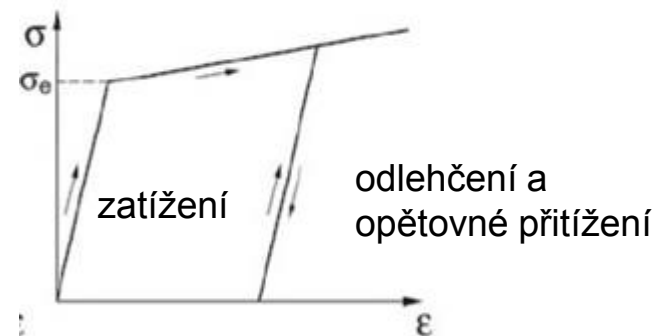
Charakteristika základních pružně-plastických modelů

- Pružně ideálně-plastický (linear elastic- perfectly plastic) – do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při konstantním napětí, nejčastěji používaný materiálový Mohr- Coulomb model
- Model pružně plastický se zpevněním (hardening)- do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při zvyšujícím se napětí až do porušení, nejznámějším modelem tohoto charakteru je model Cam-Clay

Pružně-ideálně plastický model



Pružně plastický se zpevněním



Charakteristika základních pružně-plastických modelů

- Model pružně plastický se změkčením (softening) -do meze plasticity se materiál chová pružně, dále vznikají plastická přetvoření při snižujícím se napětí až do porušení
- další pokročilé plastické konstitutivní modely (např. hypoplastický model (Mašín))

Plocha plasticity

Pružně plastické konstitutivní modely zavádějí tzv. **plochu plasticity (yield surface)** $f(\sigma)=0$, která je vyjádřena pomocí určité **podmínky plasticity** $f(\sigma)$ odpovídající jednotlivým konstitutivním modelům.

Přípustné stavy odpovídají stavu **uvnitř nebo na ploše plasticity**.

Tato funkce plasticity je základem pro rozlišení, zda dochází k pružnému nebo plastickému přetvoření.

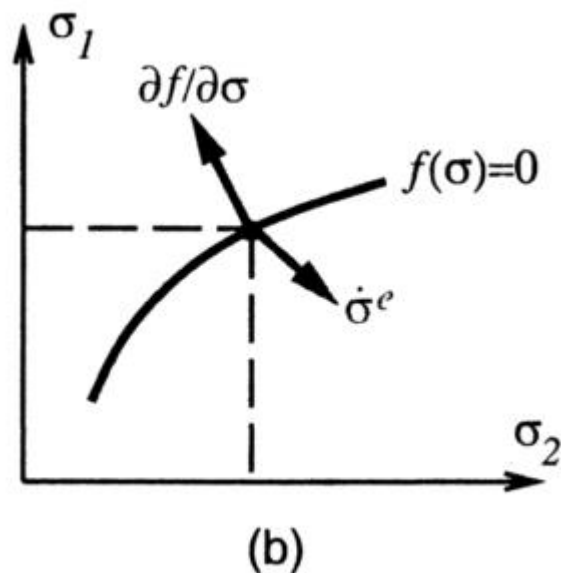
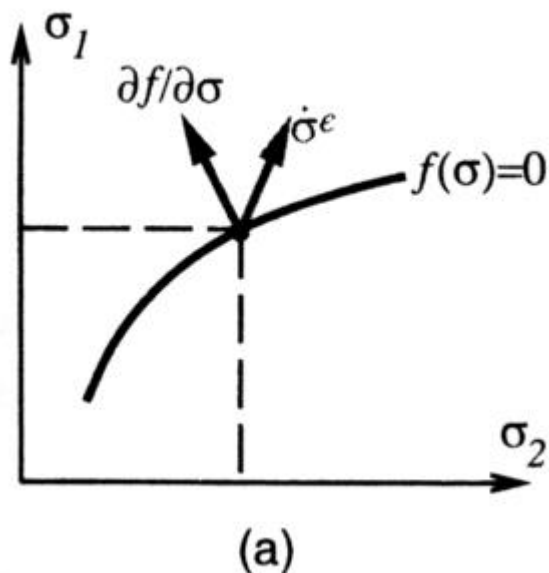
Pokud vyjádříme podmínku plasticity pomocí hlavních napětí, dostáváme po záměně pořadí hlavních os napětí v prostoru $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ **prostorovou plochu plasticity**, dělící celý prostor hlavních napětí na dvě části.

Uvnitř stanovené plochy plasticity se materiál chová pružně (plastické přetvoření je nulové).

Na ploše plasticity $f(\sigma)=0$ pak dále rozhoduje o chování přírůstek deformace. Přírůstek deformace může směřovat buď k elastoplastickému přitěžování nebo elastickému odlehčování.

Při vyhodnocování podmínky plastického zatěžování mohou nastat obecně 2 reálné situace

- a) stav napětí je na ploše plasticity a zkušební přírůstek napětí $\dot{\sigma}^e$ směřuje vně plochy plasticity- dochází k plastickému zatěžování
- b) stav napětí je na ploše plasticity a zkušební přírůstek napětí $\dot{\sigma}^e$ směřuje podél nebo dovnitř plochy plasticity – odezva pružná



Plastický potenciál

Pokud dochází k plastickému přetváření, pak je třeba stanovit směr m a velikost přírůstku plastického přetvoření.

Směr přírůstku plastického přetvoření m je kolmý k ploše tzv. **plastického potenciálu (plastic potential)** $g(\sigma)$,

$$\text{tj. } m = \frac{\delta g(\sigma)}{\delta \sigma}$$

Sdružená plasticita (associated plasticity)

funkce plasticity je identická s plastickým potenciálem, tj- $f=g$ (vhodná pro zeminy s kontraktantním chováním –měkké jíly, kypré písky, ...), jednodušší, vyžaduje méně parametrů, k tomuto typu plasticity patří např. Mohr-Coulombův model

Nesdružená plasticita (non-associated plasticity)

funkce plasticity f je různá od plastického potenciálu g

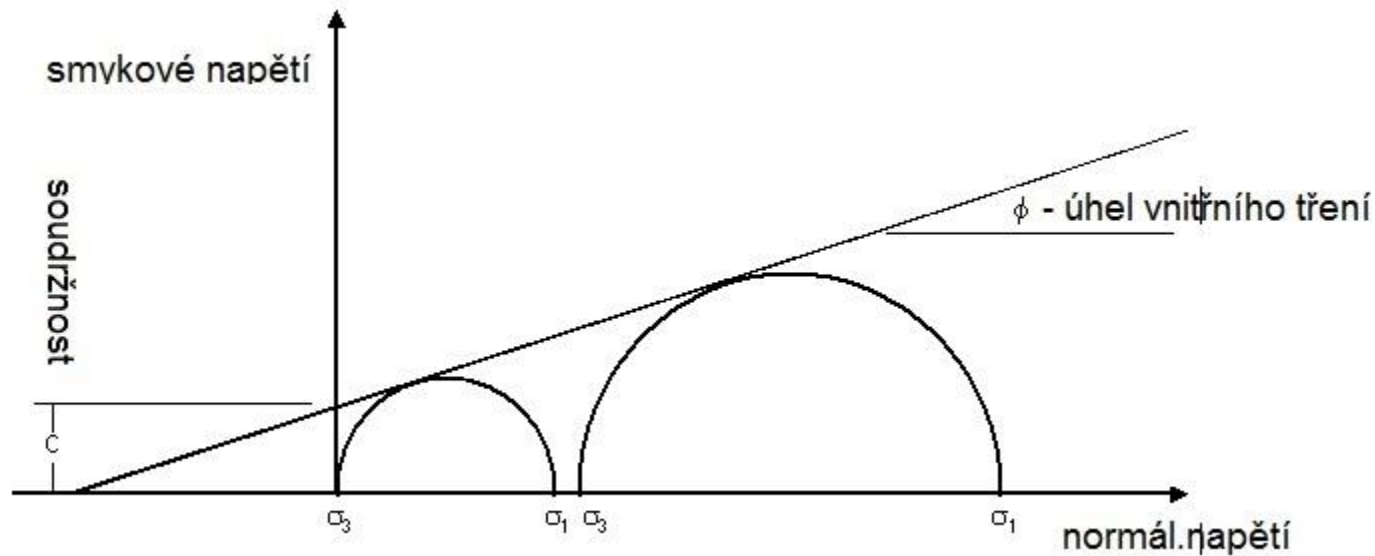
Mohr-Coulomb (pružný-ideálně plastický model)

- nejčastěji využívaný v geotech. praxi, i když nemusí poskytovat vždy zcela objektivní výsledky
- pružný-ideálně plastický model (bez zpevnění)
- představuje sdruženou plasticitu (funkce plasticity je rovna plastickému potenciálu)
- 5 základních charakteristik (modul pružnosti, Poissonovo číslo, soudržnost, úhel vnitřního tření, úhel dilatance), nezohledňuje stavový charakter charakteristik – avšak výhodou je, že využívá standardní laboratorní výstupy
- nezohledňuje nelineární chování – uvnitř plochy plasticity předpokládá lineárně elastické chování

Mohr-Coulomb (pružný-ideálně plastický model)

- nezohledňuje změnu tuhosti v závislosti na přetvoření, stejný modul pružnosti při zatěžování i odlehčování – způsobuje např. nereálné zvedání povrchu nad tunelem při odlehčení
- identická podmínka pro plasticitu i porušení
- přehodnocuje nedrénovanou smykovou pevnost
- reálnější výsledky dává model při řešení stabilitních úloh, deformace není schopen modelovat mnohdy zcela objektivně

Grafické vyjádření Mohr-Coulombovy podmínky porušení a plasticity



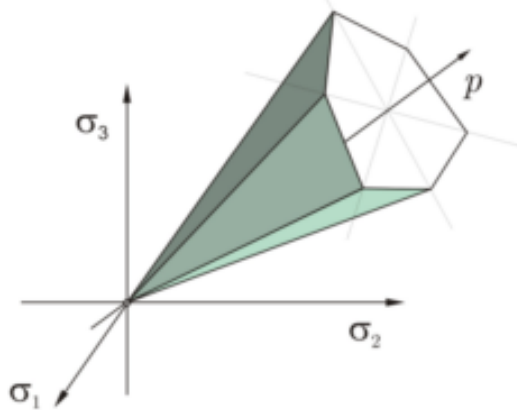
Vyjádření Mohr-Coulombovy obalové čáry :

$$\tau = \sigma \tan \varphi + c$$

Podmínka plasticity a porušení Mohr-Coulombova modelu vyjádřená v hlavních napětích

$$f = 0.5(\sigma_1 - \sigma_3) + 0.5(\sigma_1 + \sigma_3)\sin \varphi - c \cos \varphi$$

V prostoru hlavních napětí představuje plocha plasticity pravidelný šestiboký jehlan.

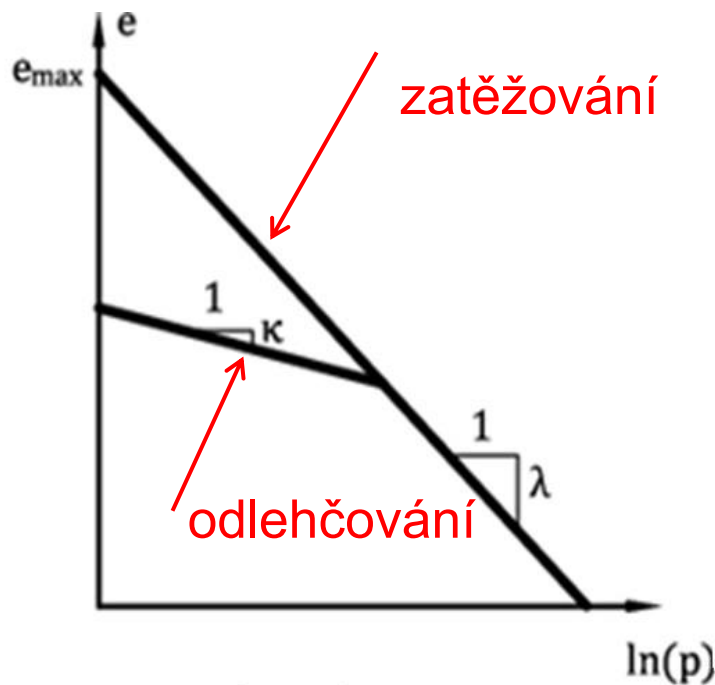


Grafické znázornění plochy plasticity v případě nesoudržných materiálů ($c=0$)

Cam-Clay model (pružně plastický model se zpevněním)

- nejčastěji používaný pružně-plastický model se zpevněním (izotropním)
- vznik na počátku 60. let 20.století na University of Cambridge (Roscoe)
- zpevnění je funkcí přírůstku plastického objemového přetvoření, které je svázáno se změnou čísla pórovitosti e

Cam-Clay model (pružně plastický model se zpevněním)



stlačitelnost při zatěžování je určena charakteristikou

λ (sklon čáry primární konsolidace)

při odlehčování charakteristikou

κ (sklon čáry při odlehčení)

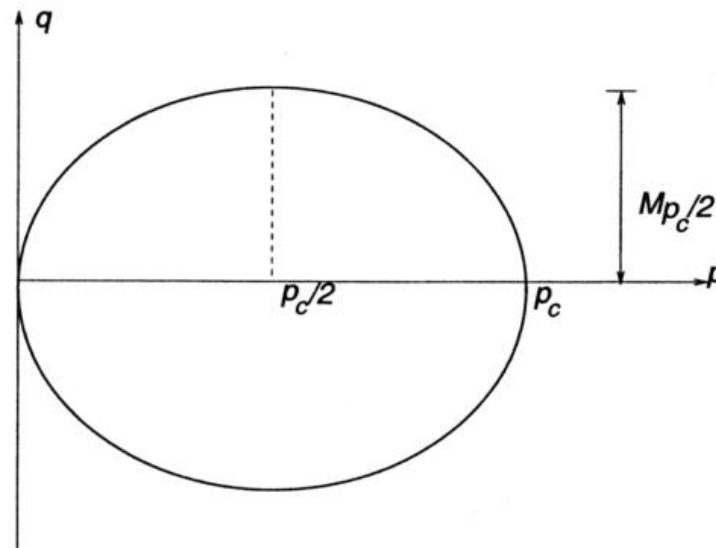
p -střední napětí

e_{\max} - počát. číslo pórovitosti

Při opětovném přitížení křivka kopíruje přibližně křivku při odlehčení a po dosažení předchozího maximálního napětí plynule navazuje na křivku primárního stlačování (zemina má jakousi “paměť” na předchozí deformaci)

Plocha plasticity modelu Cam Clay

plocha plasticity je sdružená s plochou plastického potenciálu a má tvar rotačního elipsoidu (v rovině p-q se tedy jedná o elipsu, kde p-střední napětí, q-deviátorové napětí)



p_c – překonsolidační napětí

M – materiálová konstanta, závisující na úhlu tření φ_c v kritickém stavu (odpovídající kritickému číslu pórovitosti)

$$M = \frac{6 \sin \varphi_c}{3 - \sin \varphi_c}$$

Hypoplastický materiálový model

- patří mezi pokročilé nelineární materiálové modely (Mašín, 2005)
- je schopen objektivněji zohlednit reálné chování materiálů, zejména měkkých jemnozrnných zemin
- přetvoření se nedělí na pružné a plastické (nedefinuje se tedy funkce plasticity ani plastický potenciál)
- využívá mechaniky kritických stavů, pórovitost je považována za stavovou veličinu
- vyžaduje zadání 5 materiálových charakteristik, jejich stanovování je komplikovanější ve srovnání např. s Mohr-Coulombem

Základní aspekty konstitutivních modelů

Základní aspekty chování zemin	Lineárně pružný model	Mohr-Coulomb	Cam-Clay model	Hypoplastický model (Mašín)
Mezní plocha stavů	N	A (pouze plocha porušení)	A	A
Závislost chování na středním napětí a pórovitosti	N	N	A	A
Nelineární chování zemin	N	N	N	A
Závislost tuhosti na historii zatěžování	N	N	N	A
Závislost tuhosti na úrovni napětí	N	N	A (pouze objem.tuhost)	A

Modelování v geotechnice – Konstitutivní modelování

Nicoll Highway Collapse (Singapore, 2004)

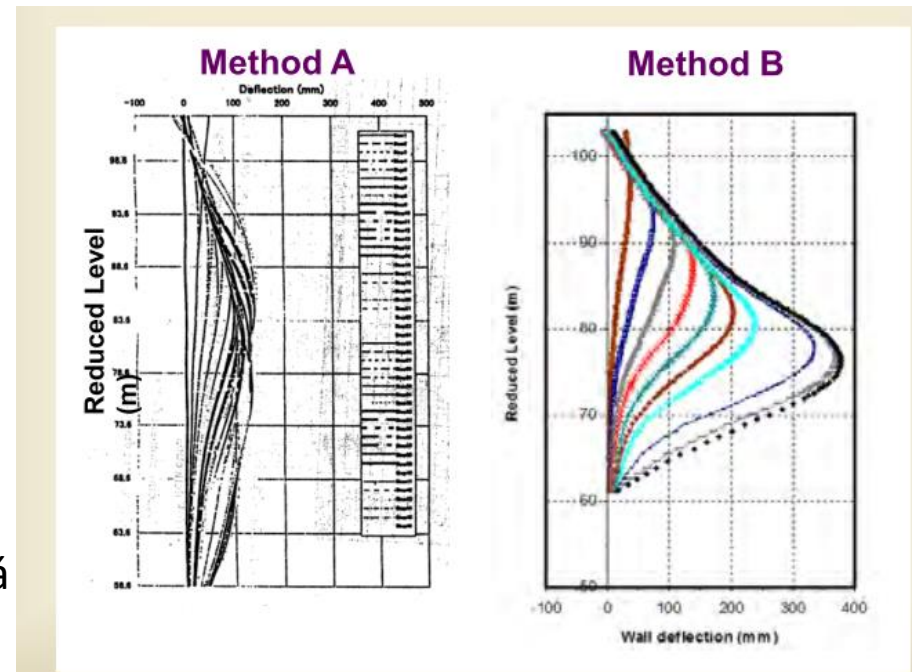


Zdroj: www.google.cz

Metoda A:
nedrénovaná analýza v efektivních napětích,
efektivní smykové parametry c , φ , přeceněná
nedrénovaná smyková pevnost c_u

Metoda B: nedrénovaná analýza v efektivních napětích,
 $c=c_u$, $\varphi=0$

Jednou z hlavních příčin bylo selhání pažicího systému dimenzovaného na základě nesprávného nastavení Mohr-Coulombova materiálového modelu v programu Plaxis.



Při volbě vhodných konstitutivních (fyzikálních) vztahů pro daný materiál je vždy nutno zejména s ohledem na časové nároky praxe optimalizovat vztah:

dostupnost vstupních charakteristik x výstižnost chování zeminového prostředí

www.soilmodels.info – otevřená databáze konstitutivních modelů pro numerickou analýzu , interface pro implementaci do softwarů