Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Obecný postup při numerickém modelování
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Obecný postup při numerickém modelování

- Stanovení cílů modelování
- Zjednodušení reálné situace
- Numerická formulace
- Výběr vhodné matematické metody a odpovídajícího výpočetního programu
- Zadání vstupních dat výpočtů (preprocesor)
- Vlastní matematické řešení úlohy

STANOVENÍ CÍLŮ MODELOVÁNÍ

- stabilita svahů
- napěťodeformační stav v okolí podzemního díla
- statické řešení výztužní konstrukce
- filtrační stabilita hrází
- apod.

Nutno zohlednit dostupné hardwarového a softwarového vybavení, ekonomické i časové hledisko tvorby modelu i výpočtu.

ZJEDNODUŠENÍ REÁLNÉ SITUACE

- redukce dimenze úlohy (pokud jsou splněny předpoklady pro redukci) - např. redukce 3D modelu na rovinný model v případě splnění požadavků na rovinné přetvoření (liniová díla, tunely, hráze, násypy, opěrné konstrukce apod.)

- zjednodušení geometrie - zohlednění pouze podstatných vlivů:

  ✓ zjednodušení geometrie

  ✓ zjednodušení rozhraní vrstev v geologickém profilu

  ✓ zjednodušení materiálové variability (např. kvazihomogenní celky)

Výchozí motto formulace modelu: Make everything as simple as possible, but not simpler. Albert Einstein

NUMERICKÁ FORMULACE ÚLOHY

popis chování modelu, popř. jeho částí pomocí řídících rovnic

Základní řídící rovnice:

- Diferenciální rovnice rovnováhy – popisuje podmínku rovnováhy, kterou musí splňovat složky napětí
- Geometrické rovnice – udávají vztah mezi deformací a posuny
- Fyzikální (konstitutivní) rovnice – udávají vztah mezi přetvořením a napětím
- Lévyho podmínka souvislosti přetvoření – podmínka souvislosti přetvoření bez roztržení materiálu (pro metody modelování kontinua)

VÝBĚR VHODNÉ MATEMATICKÉ METODY A ODPOVÍDAJÍCÍHO VÝPOČETNÍHO PROGRAMU

Kontinuální x diskontinuální model prostředí (např. skalní prostředí s blokovou strukturou, sypký granulární materiál, vliv diskontinuit je primární)

↓

volba numerické metody

↙ ↘

numerická metoda modelování kontinua
(metoda konečných prvků, metoda hraničních prvků, metoda konečných diferencí) –předpoklad kontinuálního přetváření tělesa, bez možnosti modelování odtržení
(např. software Plaxis, Midas GTS, GEO5 MKP, CESAR, FLAC, …)

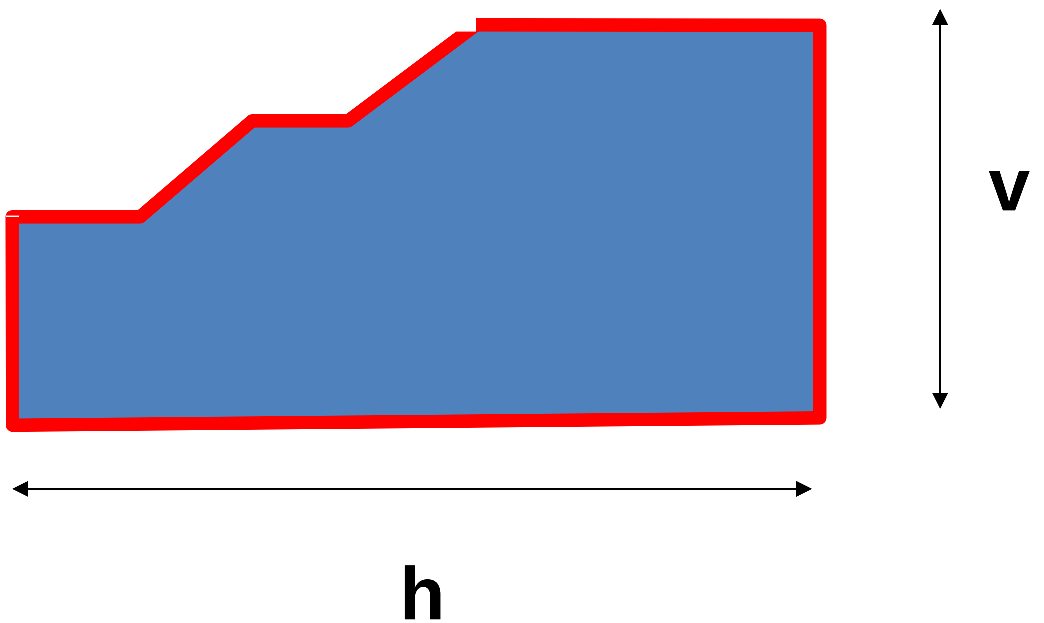
numerická metoda modelování diskontinua
(metoda oddělených elementů- softwary UDEC, PFC) – umožňuje modelovat separaci bloků, otevírání resp. uzavírání trhlin …

Zadání vstupních dat výpočtů (preprocesor)

- Rozsah
- Volba typu rozdělení oblasti na dílčí podoblasti
- Geometrie
- Konstitutivní vztah
- Materiálové charakteristiky konstitutivních modelů
- Okrajové podmínky
- Počáteční podmínky

Rozsah modelu

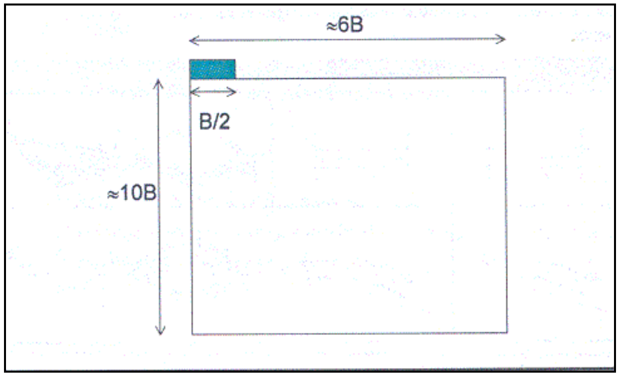
Volby výšky a šířky modelu



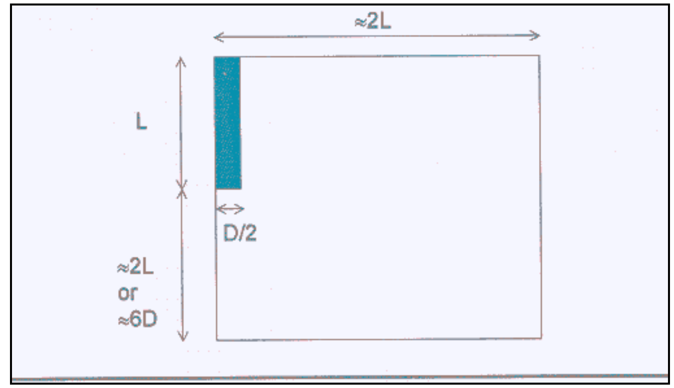
Hranice modelu musí být tak daleko, aby nedocházelo k ovlivnění výpočtu okrajovými podmínkami úlohy. Tato podmínka je zohledněna obvykle dostatečnou výškou a šířkou modelu, v některých případech je určena přímo reálnou situací (např. v podloží se nachází tuhá, prakticky nedeformovatelná hornina).

Doporučené rozsahy modelů pro jednotlivé typy staveb

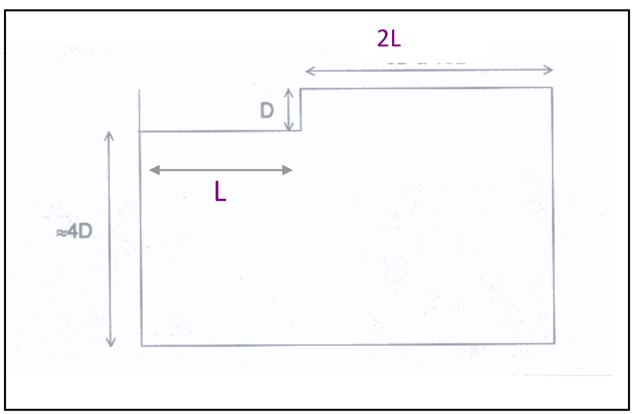
Plošné základy



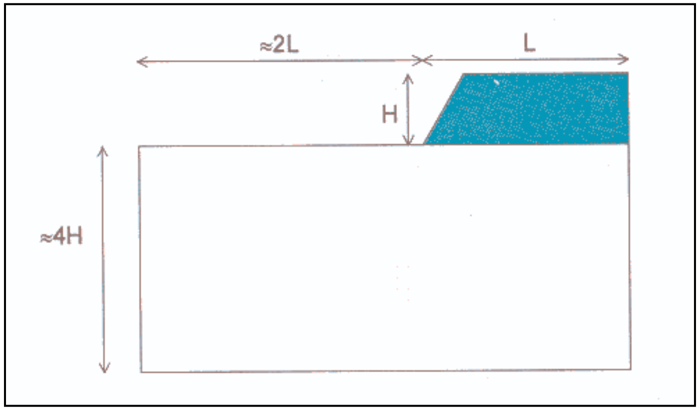
Hlubinné základy



Nevyztužená jáma

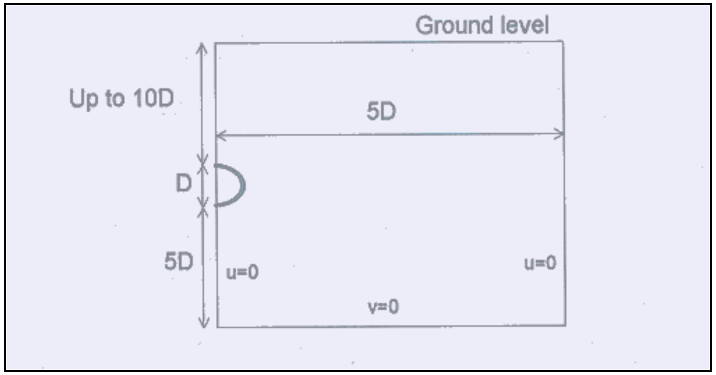


Násyp

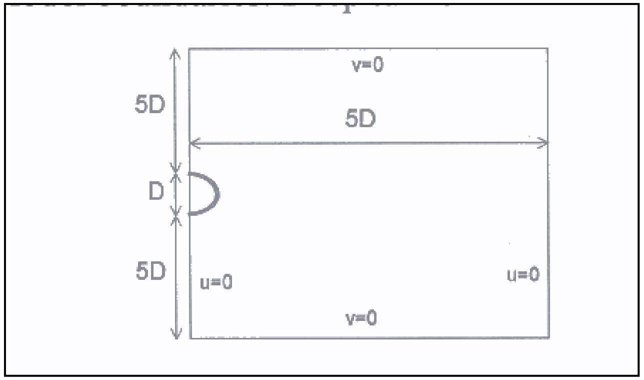


Doporučené rozsahy modelů pro tunelové stavby

Mělké tunely



Hluboké tunely



Volba typu rozdělení oblasti na dílčí podoblasti (diskretizace)

- Každá numerická metoda vyžaduje rozdělení na určité dílčí podoblasti (konečné prvky, oddělené prvky, hraniční prvky apod.)

- Volba typu aproximace přesného řešení na prvku (lineární, kvadratická popř. aproximace vyšších řádů) předurčuje typ podoblasti (trojúhelník s určitý počtem uzlových bodů, čtyřúhelník, v prostoru např. čtyřstěny s určitým počtem uzlových bodů apod.)

- Volba velikostí dílčích podoblastí – závisí na typu a geometrické komplikovanosti úlohy, v místech očekávaných velkých změn napětí resp. posunů by měly být podoblasti (prvky) menších rozměrů (např. paty svahů, okolí výrubu díla apod.)

- Obecně se v případě stabilitních úloh doporučuje volba prvků s aproximační funkcí vyššího řádu

Zadání geometrie modelu

- základní geometrie (rozsah modelu, řez svahem apod.)
- rozhraní materiálů (rozhraní jednotlivých zeminových resp. horninových vrstev), antropogenní rozhraní (zpevněné zeminy apod.)
- geometrie diskontinuit (směry diskontinuit, vzdálenosti jednotlivých diskontinuit apod.)
- geometrie příčného průřezu podzemního díla
- atd.

určuje generaci sítě

Volby resp. zadání konstitutivního vztahu materiálů v modelu

- Volba vhodného konstitutivního modelu je jedna z nejzákladnějších a současně nejproblematičtějších součástí tvorby modelu (viz samostatná kapitola Konstitutivní vztahy)

- Volba typu konstitutivního modelu je závislá na typu materiálu (jíly, štěrky, horniny, beton, ocel, …) a předurčuje významně stupeň vypovídací schopnosti modelu

- V případě diskontinuitních modelů je třeba kromě volby konstitutivního vztahu pro bloky stanovit i vhodný konstitutivní vztah pro diskontinuity

Modelování v geotechnice – Obecný postup při numerickém modelování

Zadání materiálových charakteristik konstitutivních modelů

Čím sofistikovanější konstitutivní vztah, tím jsou obvykle kladeny větší požadavky na charakter a rozsah laboratorních zkoušek pro stanovení vstupních dat (z toho vyplývají i vyšší časové nároky na přípravu modelu)

Základní vlastnosti horninových bloků

přetvárné

popisné

pevnostní

vlastnosti diskontinuit

charakter povrchu

vlastnosti výplně

Základní charakteristiky bloků horninového masívu

Přetvárné charakteristiky – Youngův modul pružnosti
Poissonovo číslo
smykový modul pružnosti
popř. další v závislosti na volbě konstitutivního vztahu

Popisné charakteristiky – objemová tíha
pórovitost
popř. další v závislosti na volbě konstitutivního vztahu

Pevnostní charakteristiky – soudržnost
úhel vnitřního tření
úhel dilatance
popř. další v závislosti na volbě konstitutivního vztahu

Základní materiálové charakteristiky diskontinuit

Charakter povrchu diskontinuity - povrch drsný resp. hladký

Charakter výplně diskontinuity – bez výplně
s výplní tvořenou úlomky hornin
s jílovitou výplní různé konzistence
zvodnělá výplň

Deformační chování diskontinuit je nejčastěji simulováno dvojicí pružin (v normálovém a smykovém směru), které mají rozličnou tuhost.

Normálová tuhost k_n charakterizuje chování diskontinuity ve směru kolmém k ploše diskontinuity, smyková tuhost k_s pak v samotné ploše diskontinuity.

Okrajové podmínky modelu

Geometrické – základní okrajové (hraniční) podmínky modelu, zamezují pohybu modelu jako celku

Silové – jsou zadávány v případě potřeby zadáním přitížení na hranici nebo její části (objektem, dopravou apod.)

Konsolidační okrajové podmínky- stanovují charakter hranic modelu z hlediska propustnosti a s tím spojeným vytlačováním vody z pórů

Omezující okrajové podmínky z hlediska proudění vody-stanovují charakter hranic modelu z hlediska proudění vody (propustné resp. nepropustné)

Geometrické okrajové podmínky modelu

Zadávají se omezení posunů na hranicích modelu – standardní geometrické podmínky odpovídají tzv. tuhé vaně – v případě statických úloh jsou na vertikálních hranicích omezeny posuny ve směru horizontálním, na spodní hranici modelu ve směru vertikálním , popř. v obou směrech.

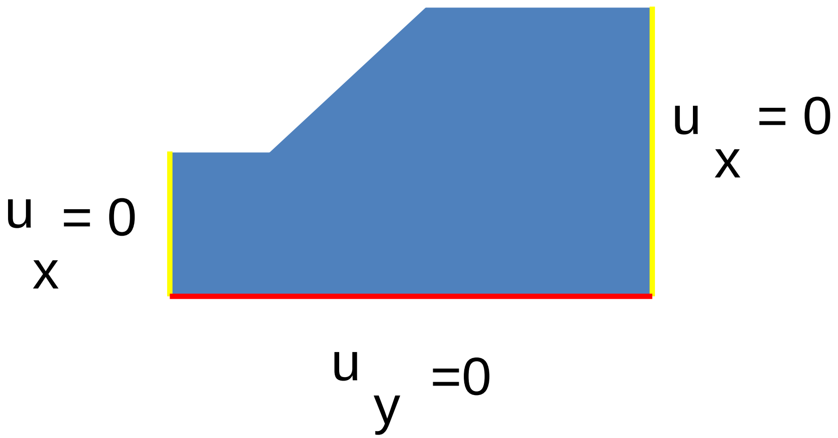
V případě řešení dynamické rovnováhy jsou výše uvedeným způsobem omezeny rychlosti.

Pro objektivitu geometrických okrajových podmínek a eliminaci jejich vlivu na řešení úlohy nutno volit vhodný rozsah modelu!

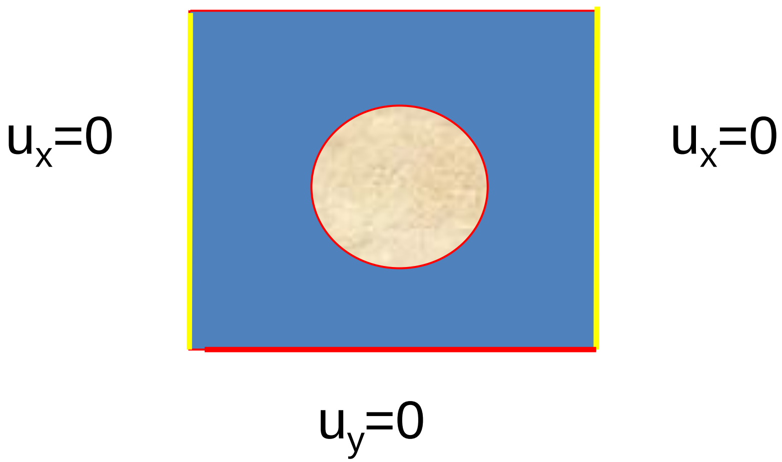
Doporučované rozsahy modelu pro různé typy staveb byly již uvedeny dříve.

Standardní geometrické podmínky (tuhá vana) v případě statické rovnováhy

Příčný řez svahem

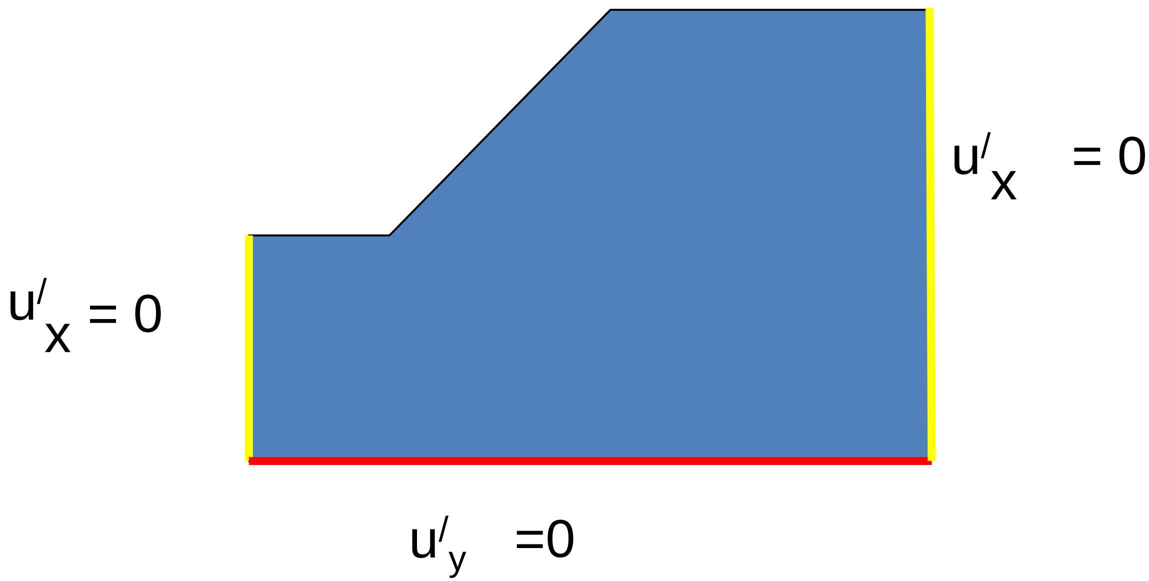


Příčný řez tunelem



Standardní geometrické podmínky v případě dynamické rovnováhy

(omezení rychlostí v horizontálním směru na svislých hranicích a omezení rychlosti ve vertikálním směru na spodní hranici modelu – aplikace např. v systému UDEC (metoda oddělených elementů))



Počáteční podmínky modelu

- Primární (počáteční stav) napjatosti v horninovém prostředí – svislá složka obvykle uvažována jako tíha nadloží, horizontální složka je zjednodušeně uvažována jako součin vertikální složky a koeficientu bočního tlaku.

  Koeficient bočního tlaku je možno stanovit na základě různých výpočetních vztahů, nejčastěji používané vztahy:

Jákyho vztah: $K_b = 1 - \sin\varphi$ (φ – úhel vnitřního tření)

Terzaghiho vztah: $K_b = \mu/(1-\mu)$ (μ – Poissonovo číslo)

- Počáteční hodnota pórového tlaku (daná např. počáteční výškou hladiny podzemní vody)

Pozor na rozdíl mezi okrajovými a počátečními podmínkami!!

ŘEŠIČ VÝPOČETNÍHO PROGRAMU

Základní zadávané charakteristiky (v závislosti na konkrétním řešiči):

- metoda řešení odpovídající soustavy algebraických rovnic
  (Gaussova přímá eliminační metoda, iterační metoda)
- přesnost řešení
- počet výpočetních kroků

ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

1. *PŘESNÉ (FINITNÍ) METODY* – teoreticky přesné řešení se získá po konečně mnoha krocích

2. *ITERAČNÍ (PŘIBLIŽNÉ) METODY-* k přesnému řešení konverguje nekonečná posloupnost vektorů (efektivnost iteračních metod závisí na volbě počáteční aproximace a na rychlosti konvergence)

Maticový zápis soustavy lineárních rovnic:

A x = b

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

matice (m x n)
m řádků
n sloupců

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

jesliže m=n jedná se o *čtvercovou matici*

Často používané typy matic:

Čtvercová matice: počet řádků se rovná počtu sloupců (m=n)

Inverzní matice: $A.A^{-1}=A^{-1}.A=E$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 1 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix}$$

jednotková matice

Transponovaná matice A^T k matici A: vzniká záměnou řádků a sloupců původní matice A

Diagonální matice:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ 0 & . & . & . & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

Regulární matice - čtvercová matice, pro níž platí:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{n1} & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

podmínka pro existenci právě jednoho řešení soustavy,
ke každé regulární matici existuje matice inverzní A^{-1}

V opačném případě se jedná o *singulární matici.*

Regularitu matice zajišťují v případě numerických metod především správně zadané okrajové podmínky!

Špatně podmíněné matice: malá změna v hodnotách prvků matice způsobí relativně velkou chybu v řešení

V opačném případě se jedná o *dobře podmíněné matice*

Symetrická matice: $a_{i,j}=a_{j,i}$, pro každé i,j

Pozitivně definitní matice: pro každý nenulový vektor x platí:

$$x^T A\, x > 0$$

Symetrická pozitivně definitní matice je regulární- zajišťuje tedy existenci jediného řešení soustavy.

Řídká matice- má velký počet nulových prvků různě umístěných

Pásová matice- řídká matice, jejíž nenulové prvky jsou soustředěny kolem hlavní diagonály

Trojúhelníková matice:

Horní trojúhelníková matice- nenulové prvky matice jsou pouze na hlavní diagonále a nad ní, ostatní prvky jsou nulové

Dolní trojúhelníková matice- nenulové prvky jsou pouze na hlavní diagonále a po ní

ŘEŠENÍ SOUSTAVY:

$x = A^{-1} . b$

A^{-1} – tzv. *inverzní matice*

Způsob řešení soustavy závisí do značné míry na typu matice soustavy –existují pak specializované algoritmy pro řešení soustav s určitým typem matice (matice symetrická, pásová apod.)

Nejčastěji používané přímé metody řešení soustav lineárních rovnic

1) Cramerovo pravidlo- řešení soustav lin. rovnic o n neznámých se převádí na výpočet (n+1) determinantů n-tého stupně, pro velké soustavy rovnic je tato metoda nevhodná

2) *Gaussova eliminační metoda-* nejrozšířenější eliminační metoda, pro rozsáhlé soustavy rovnic relativně pomalá

Princip: danou soustavu převedeme postupnými úpravami na ekvivalentní soustavu, která má trojúhelníkovou matici

Postup při řešení touto metodou lze rozdělit na:

a)Přímý chod – stanovení ekvivalentní soustavy s trojúhelníkovou maticí

b) *Zpětný chod* – určení neznámých x_i, i=1,…, n

3) Metoda odmocnin

4) Choleského metoda

Nejčastěji používané iterační metody pro řešení soustav lineárních algebraických rovnic

1) Jacobiho iterační metoda

iterační předpis:

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(i)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k^{(i)} \right)$$

Při řešení touto iterační metodou je nutno v paměti počítače uchovávat všechny složky vektoru $x^{(i)}$

2) Gauss-Seidlova iterační metoda:

Iterační předpis:

$$x_j^{(i+1)} = \frac{1}{a_{jj}} \left(b_j - \sum_{k=1}^{j-1} a_{jk} x_k^{(i+1)} - \sum_{k=j+1}^{n} a_{jk} x_k^{(i)} \right)$$

V případě této iterační metody se uchovává v paměti méně dat.

3) Metoda střídavých směrů

4) Gradientní metody

5) Metoda největšího spádu

6) Superrelaxační metoda

Shrnutí

Přímé metody:

1) nevyžadují volbu počáteční aproximace
2) jsou pomalejší
3) relativně velké nároky na paměť

Iterační metody:

1) Vyžadují volbu počáteční aproximace
2) Rychlejší
3) Nutnost uchování menšího množství dat

Zhodnocení výsledků modelování

- Každý model je zatížen ve větší či menší míře objektivními či subjektivními chybami- není možno je zcela eliminovat, objektivní chyby vyplývají ze samotné podstaty modelování

- Každý výsledek modelování je nutno kriticky posoudit z hlediska očekávaných výsledků, zkušeností, popř. porovnání s analytickým modelem, optimální je porovnání s výsledky geotechnického monitoringu

- Není přípustná formulace „ tak mi to vyšlo z počítače“

- Za výsledek modelování vždy odpovídá realizátor výpočtu, nikoliv aplikovaná metoda ani software !!!