Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Metoda konečných diferencí
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.
Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

METODA KONEČNÝCH DIFERENCÍ (METODA SÍTÍ)

- metoda numerická – přesné řešení úlohy je aproximováno řešením přibližným (numerickým), řešení soustavy diferenciálních rovnic je převedeno na řešení soustavy algebraických rovnic

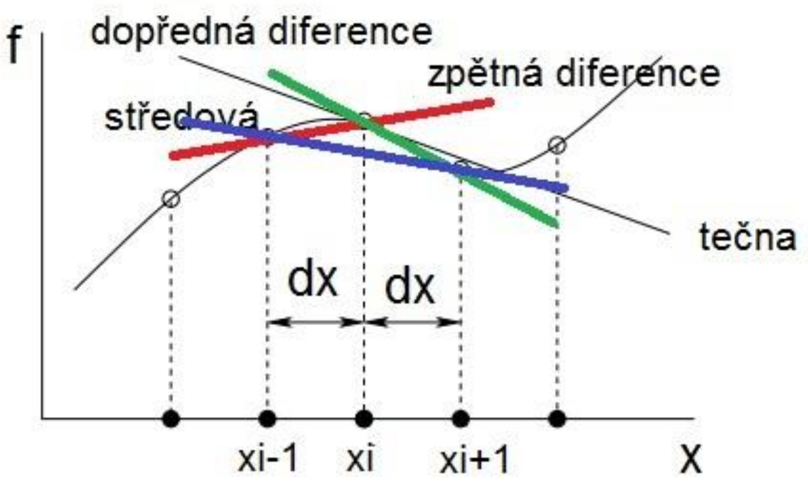
- metoda modelování kontinua

- základní princip: nahrazení parciálních derivací v diferenciálních rovnicích diferencemi (tj lineárními kombinacemi funkčních hodnot hledané funkce v okolních bodech)

- diskretizace úlohy je realizována jak v prostoru, tak i v čase, stanovujeme tedy řešení úlohy v konečném počtu bodů prostoru a v konečném počtu časových okamžiků - tyto časoprostorové body tvoří síť

Podstata nahrazení derivací diferencemi: f(x,t) –funkce dvou proměnných x a t

derivaci funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ (směrnici tečny) v bodě x_i lze vyjádřit:



1) středovou diferencí (hodnotami v bodech x_{i-1} a x_{i+1})

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = \frac{f(x_i + dx, t) - f(x_i - dx, t)}{2\,dx}$$

2) dopřednou diferencí (hodnotami v bodech x_i a x_{i+1})

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = \frac{f(x_i + dx, t) - f(x_i, t)}{dx}$$

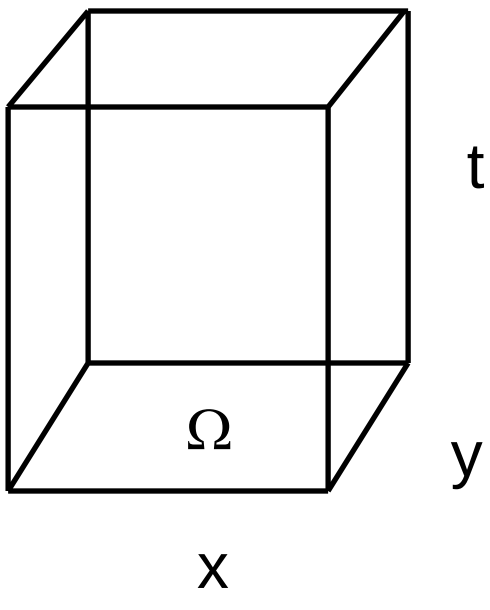
3) zpětnou diferencí (hodnotami v bodech x_i a x_{i-1})

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = \frac{f(x_i, t) - f(x_i - dx, t)}{dx}$$

Úloha ve dvou prostorových dimenzích

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \Delta u + f(x, y, t) = \frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} + f(x, y, t)$$

$$t \in \langle 0, T \rangle, \quad (x, y) \in \Omega = ((a, b) x (a, b))$$



Počáteční podmínka (v podstavě):

$$u(x, y, 0) = g(x, y) \quad , \forall (x, y) \in \Omega$$

Okrajová podmínka (v bočních stěnách)

$$u(x, y, t) = \gamma(x, y, t) \quad , \forall t \in (0, T)$$
$$(x, y) \quad na \quad hranici \quad \Omega$$

Odvození síťových rovnic

Značení:

N, r … přirozená čísla

h=(b-a)/N

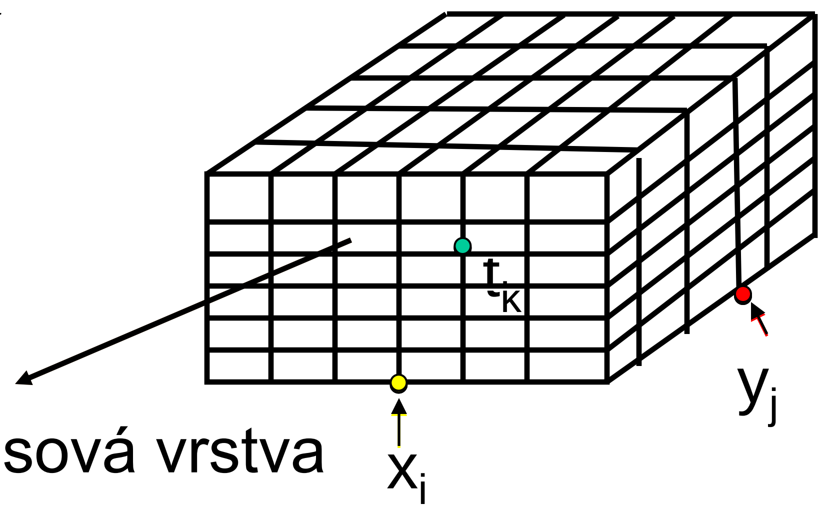
$$\tau = \frac{T}{r}$$

V oblasti uvažujeme síť tvořenou uzly (x_i,y_j,t_k):

$$x_i = a + ih, i = 0,\ldots, N$$

$$y_j = a + jh, j = 0,\ldots, N$$

$$t_k = k\tau, k = 0,\ldots, r$$



Pro pevné k budeme množinu bodů (x_i, y_j, t_k) nazývat *k-tou časovou vrstvou*.

Možnosti pro sestavení síťových rovnic pro uvažovanou diferenciální rovnici:

Derivaci podle času t nahradíme dopřednou diferencí:

$$\frac{u_{i,j}^{((k+1))} - u_{i,j}^{(k)}}{\tau}$$

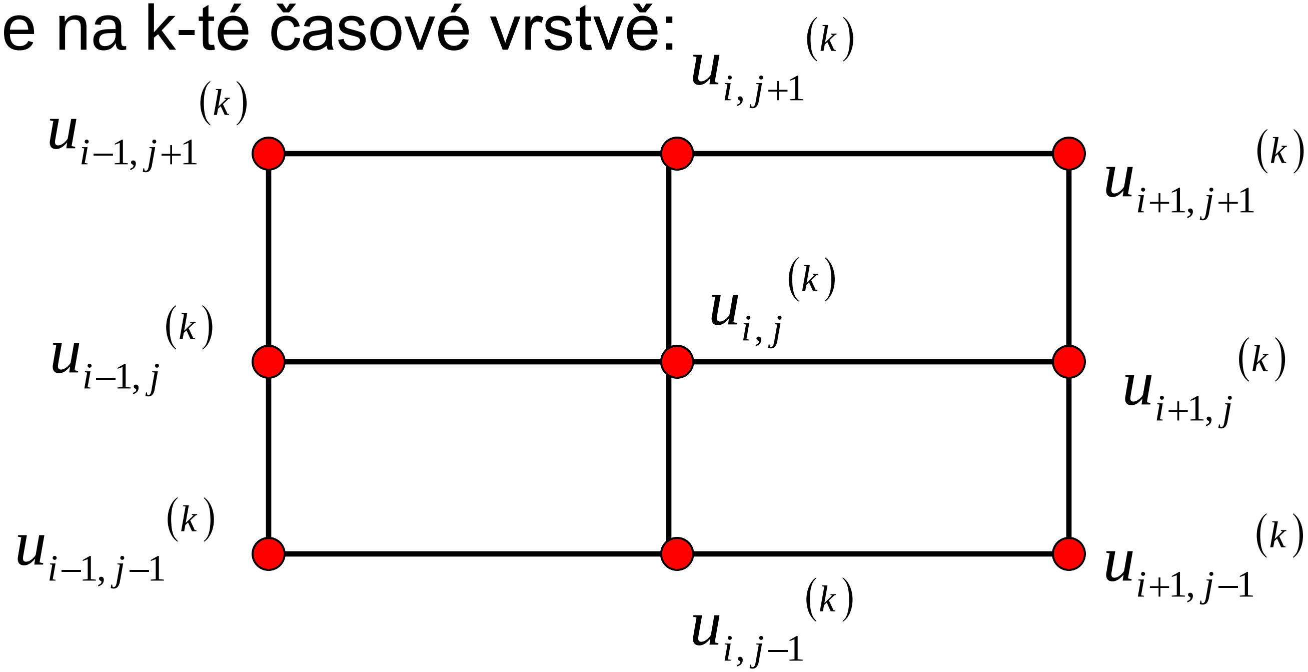
$u_{i,j}^{(k)}$ …. přibližné řešení úlohy v uzlu (x_i, y_j, t_k)

Derivaci podle proměnných x a y pak nahradíme následovně:

Derivaci podle x pomocí hodnot $u_{i-1,j}^{(k)}, u_{i,j}^{(k)}, u_{i+1,j}^{(k)}$

Derivaci podle y pomocí hodnot $u_{i,j-1}^{(k)}, u_{i,j}^{(k)}, u_{i,j+1}^{(k)}$

Situace na k-té časové vrstvě:



Nahrazení derivací diferencemi

$$\frac{\delta u}{\delta x} \approx \frac{u_{i,j}{}^{(k)} - u_{i-1,j}{}^{(k)}}{h}$$

$$\frac{\delta u}{\delta y} \approx \frac{u_{i,j}{}^{(k)} - u_{i,j-1}{}^{(k)}}{h}$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta\ x^2} \approx \frac{u_{i+1,j}{}^{(k)} - u_{i,j}{}^{(k)}}{h^2} - \frac{u_{i,j}{}^{(k)} - u_{i-1,j}{}^{(k)}}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j}{}^{(k)} - 2u_{i,j}{}^{(k)} + u_{i-1,j}{}^{(k)}\right]$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta\ y^2} \approx \frac{u_{i,j+1}{}^{(k)} - u_{i,j}{}^{(k)}}{h^2} - \frac{u_{i,j}{}^{(k)} - u_{i,j-1}{}^{(k)}}{h^2} = \frac{1}{h^2}\left[u_{i,j+1}{}^{(k)} - 2u_{i,j}{}^{(k)} + u_{i,j-1}{}^{(k)}\right]$$

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta y^2} \approx \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j}{}^{(k)} + u_{i-1,j}{}^{(k)} + u_{i,j+1}{}^{(k)} + u_{i,j-1}{}^{(k)} - 4u_{i,j}{}^{(k)}\right]$$

Celkem lze tedy rovnici přepsat pomocí diferencí takto:

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}}{\tau} \approx \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} - 4u_{i,j}^{(k)}\right] + f_i^{(k)}$$

$$\Downarrow$$

Z hodnot na k-té časové vrstvě se počítá nová hodnota $u_{i,j}$ na (k+1)-ní vrstvě

$$\Downarrow$$

EXPLICITNÍ METODA

(není potřeba řešit soustavu rovnic, ale dostáváme přímo rekurentní vztah)

Derivaci podle času t nahradíme dopřednou diferencí -
- analogicky derivace podle proměnných x a y pak nahradíme pomocí hodnot na (k+1) časové vrstvě

$$u_{i-1,j}^{(k+1)}, u_{i,j}^{(k+1)}, u_{i+1,j}^{(k+1)} \qquad u_{i,j-1}^{(k+1)}, u_{i,j}^{(k+1)}, u_{i,j+1}^{(k+1)}$$

Dostáváme analogický vztah:

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)} - u_{i,j}^{(k)}}{\tau} \approx \frac{1}{h^2}\left[u_{i+1,j}^{(k+1)} + u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j+1}^{(k+1)} + u_{i,j-1}^{(k+1)} - 4u_{i,j}^{(k+1)}\right] + f_i^{(k+1)}$$

$$\Downarrow$$

IMPLICITNÍ METODA
(dostáváme soustavu rovnic)

Kombinace implicitní a explicitní metody (jejich lineární kombinace)

$$\frac{u_{i,j}^{(k+1)}-u_{i,j}^{(k)}}{\tau} \approx \frac{\gamma}{h^2}\left[u_{i+1,j}^{(k+1)}+u_{i-1,j}^{(k+1)}+u_{i,j+1}^{(k+1)}+u_{i,j-1}^{(k+1)}-4u_{i,j}^{(k+1)}\right]+$$

$$+\frac{1-\gamma}{h^2}\left[u_{i+1,j}^{(k)}+u_{i-1,j}^{(k)}+u_{i,j+1}^{(k)}+u_{i,j-1}^{(k)}-4u_{i,j}^{(k)}\right]+\gamma f_{i,j}^{(k+1)}+(1-\gamma)f_{i,j}^{(k)}$$

i,j=1,…,N-1
k=0,…,r-1

$$\gamma \in \langle 0;1 \rangle$$

Pro γ=0 ⇒ Explicitní metoda

$\gamma \in (0;1\rangle$ ⇒ Implicitní metoda

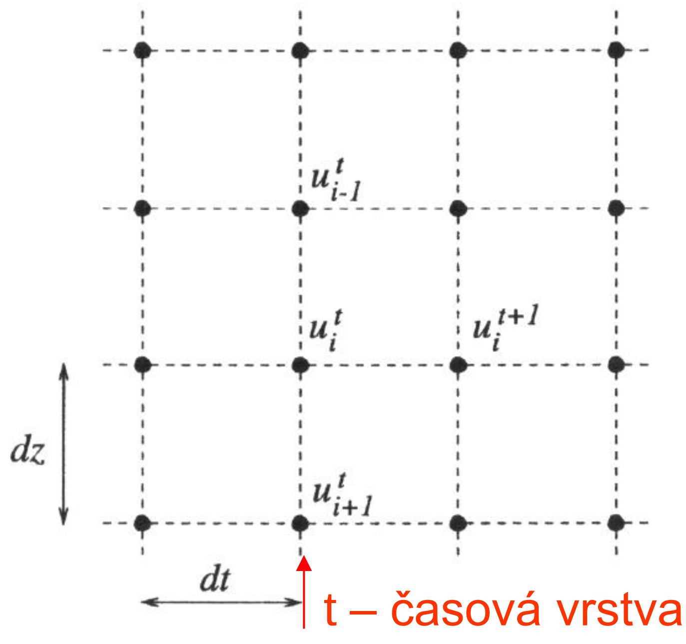
Pro γ=0.5 ⇒ Crank-Nicolsonova metoda

Rovnice jednoosé konsolidace

$$\frac{\delta u}{\delta t} = c_v \frac{\delta^2 u}{\delta z^2}$$

u – pórový tlak
t –čas
z – hloubka
cv – součinitel konsolidace

síťové body oblasti Bij=(z_i, t_j) , v těchto bodech hledáme hodnoty pórových tlaků u_i^t



dz – krok sítě ve směru z
dt –krok sítě ve směru t
(obecně nemusí být stejné)

Nahrazení derivací diferencemi:

$$\frac{\delta u}{\delta t} \approx \frac{u(z,t+dt)-u(z,t-dt)}{2dt}$$ středová

$$\frac{\delta u}{\delta t} \approx \frac{u(z,t+dt)-u(z,t)}{dt}$$ dopředná

$$\frac{\delta u}{\delta t} \approx \frac{u(z,t)-u(z,t-dt)}{dt}$$ zpětná

$$\frac{\delta^2 u}{\delta z^2} \approx \frac{u(z+dz,t)-2u(z,t)-u(z-dz,t)}{dz^2}$$

S využitím dopředných diferencí pro časovou derivaci dostáváme pro původní diferenciální rovnici jednoosé konsolidace diskretizovaný tvar:

$$\frac{u(z,t+dt)-u(z,t)}{dt}=c_v\,\frac{u(z+dz,t)-2u(z,t)-u(z-dz,t)}{dz^2}$$

Tedy z hodnot na časové vrstvě t lze spočítat hodnoty na následující (t+1) časové vrstvě při zadání počátečních podmínek v čase t=0 – není nutno řešit soustavu, jedná se o tzv. *explicitní metodu konečných diferencí:*

$$u(z,t+dt)=u(z,t)+c_v\left(\ u(z+dz,t)-2u(z,t)-u(z-dz,t)\ \right)\frac{dt}{dz^2}$$

Počáteční a okrajové podmínky konsolidační úlohy

počáteční podmínky úlohy: $u(z,0)=w(z)$

okrajové podmínky úlohy:

$u(z_{min}, t) = u(z_{max},t) = 0$ .... *oboustranná drenáž*

$\frac{\delta u(z_{min}, t)}{\delta t} = 0$, $u(z_{max}, t)=0$ .... *jednostranná horní drenáž*

S využitím zpětných diferencí pro časovou derivaci dostáváme pro původní diferenciální rovnici jednoosé konsolidace diskretizovaný tvar:

$$\frac{u(z,t)-u(z,t-dt)}{dt}=c_v\,\frac{u(z+dz,t)-2u(z,t)-u(z-dz,t)}{dz^2}$$

V tomto případě již nelze jednoduše přecházet z jedné časové vrstvy na druhou, ale je nutno řešit soustavu rovnic, která odpovídá soustavě diskretizačních rovnic sestavených pro všechny uzly sítě. V tomto případě se jedná o tzv. *implicitní metodu konečných diferencí*.

Geotechnické softwary založené na metodě konečných diferencí

- pro účely modelování geotechnických úloh je metoda aplikována např. v softwaru FLAC (firma ITASCA, USA)

- pro modelování hydrogeologických úloh pak např. v softwaru FEFLOW (DHI-WASY , Německo)