



## Katedra geotechniky a podzemního stavitelství

Modelování v geotechnice – Metoda okrajových prvků  
(prezentace pro výuku předmětu Modelování v geotechnice)

doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.



evropský  
sociální  
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,  
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání  
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Inovace studijního oboru Geotechnika CZ.1.07/2.2.00/28.0009.

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

## METODA OKRAJOVÝCH (HRANIČNÍCH) PRVKŮ (též metoda hraničních integrálů, zkratka MHP, angl.BEM)

- **metoda numerická** – přesné řešení úlohy je aproximováno řešením přibližným (numerickým), řešení soustavy diferenciálních rovnic je převedeno na řešení soustavy algebraických rovnic
- **metoda modelování kontinua**
- vznikla v souvislosti s požadavkem na redukci dimenze soustavy algebraických rovnic ve srovnání s metodou konečných prvků (zejména v případě prostorových úloh) – důležitý aspekt zejména v dobách méně výkonné výpočetní techniky a v případě rozsáhlých prostorových úloh

## ZÁKLADNÍ POSTUP METODY OKRAJOVÝCH PRVKŮ

- diskretizace pouze **hranice** řešené oblasti (nikoliv celé řešené oblasti) – redukce dimenze řešené úlohy
- stanovení interpolačních funkcí řešení na hraničních prvcích (konstantní, lineární, kvadratická, ...)
- sestavení soustavy lineárních rovnic pro hodnoty neznámých veličin v uzlech dělení hranice oblasti na prvky a její řešení (řešení numerické)
- stanovení řešení úlohy **uvnitř** řešené oblasti analyticky s využitím tzv. fundamentálního řešení úlohy (specifické pro každý typ řešené úlohy)

## SROVNÁNÍ OBECNÉHO POSTUPU MKP A MHP

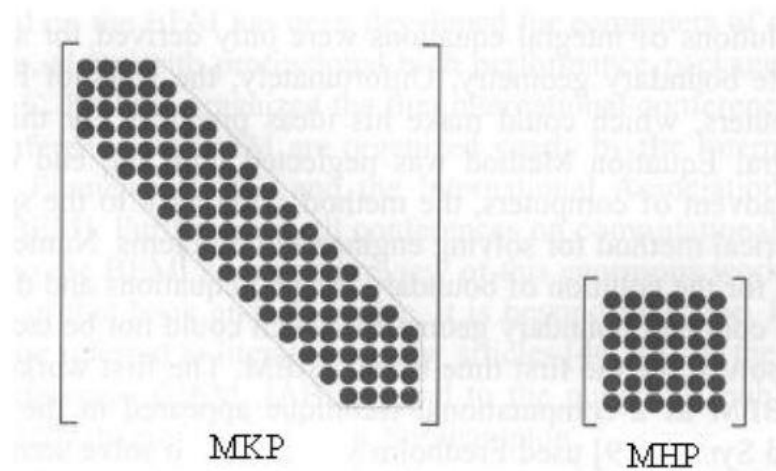
<b>Metoda hraničních prvků (MHP)</b>	<b>Metoda konečných prvků (MKP)</b>
Vytvoření geometrie modelu	Vytvoření geometrie modelu
Volba typu prvku	Volba typu prvku
<b>Diskretizace povrchu</b>	<b>Diskretizace celé oblasti</b>
Sestavení rovnic, aplikace okrajových podmínek	Sestavení rovnic, aplikace okrajových podmínek
Řešení	Řešení
Výpočet napětí a přetvoření	Výpočet napětí a přetvoření

# Modelování v geotechnice – Metoda okrajových prvků

Na každém prvku hranice řešené oblasti se posuny a síly aproximují z uzlových hodnot pomocí zvolených interpolačních funkcí.

Stejně jako v případě metody konečných prvků velikost prvků a stupeň interpolace řešení na prvku (konstantní, lineární, kvadratická, ...) určuje přesnost výsledků, ale současně zvyšuje dimenzi soustavy rovnic (zvýšení nároků na hardware, zvýšení časových nároků výpočtů).

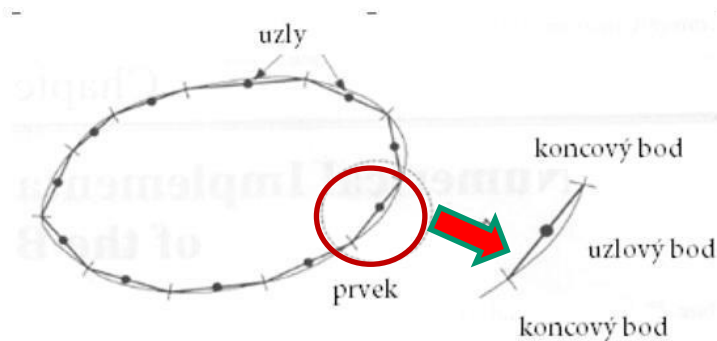
Matice soustavy rovnic má sice nižší dimenzi (neznámé hodnoty uzlů pouze na hranici oblasti), ale je nesymetrická a není pásová.



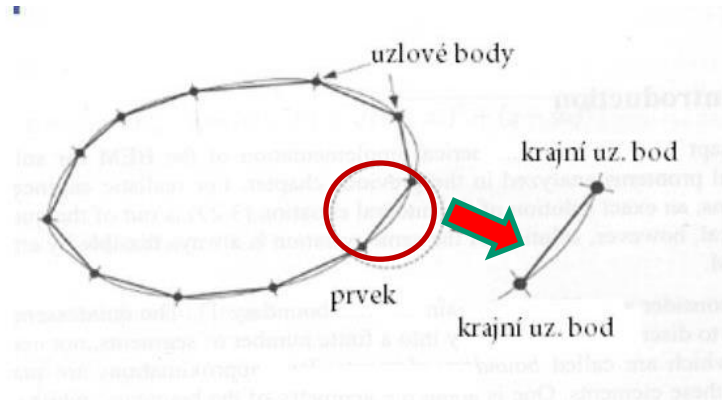
# Modelování v geotechnice – Metoda okrajových prvků

## Typy hraničních prvků pro rovinné úlohy

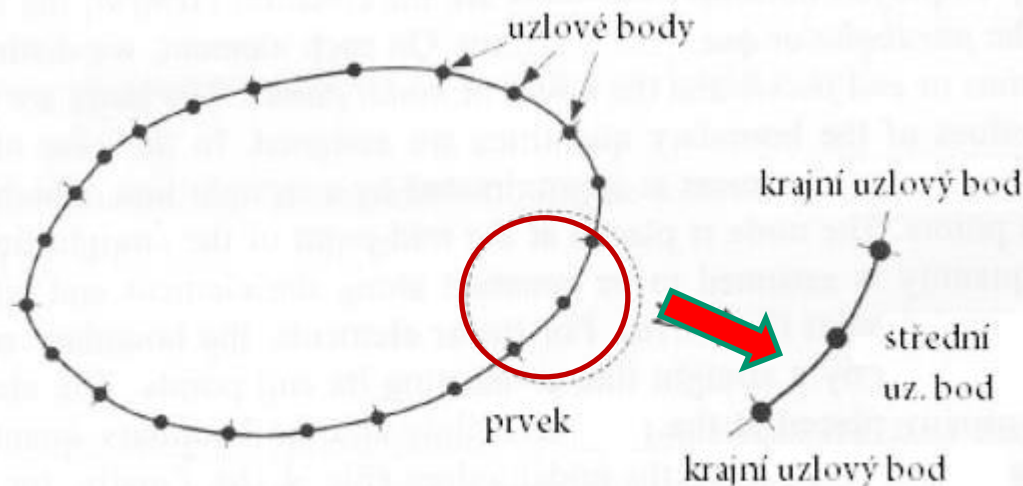
**Konstantní prvek** (nejjednodušší, 1 uzlový bod uprostřed prvku)



**Lineární prvek** (2 uzlové body na prvku, oba krajní body)



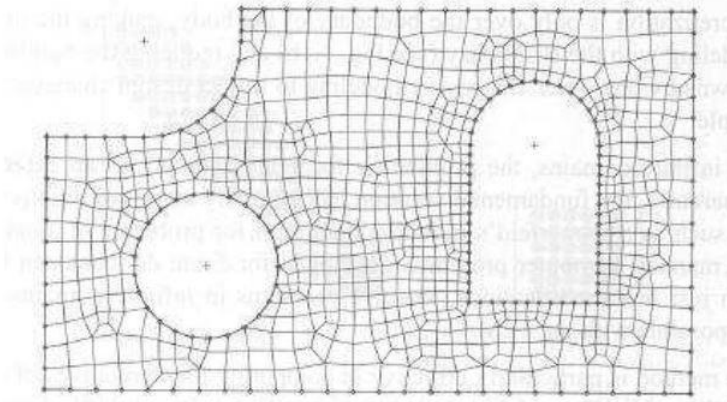
**Kvadratický prvek** (3 uzlové body – krajní body+středový bod )



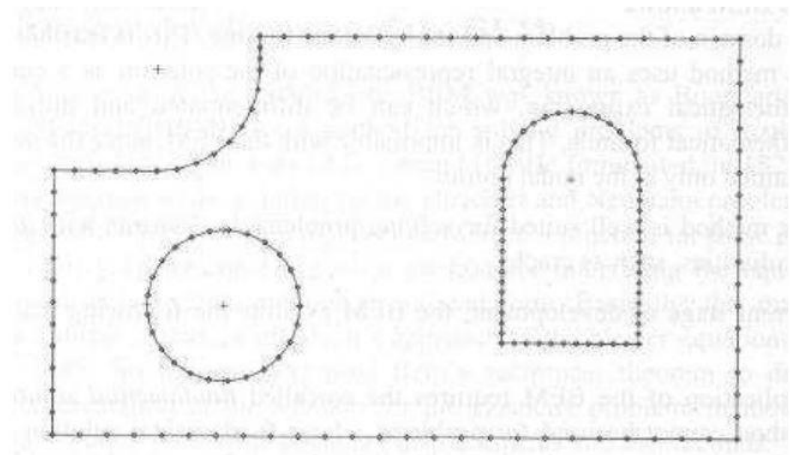
# Modelování v geotechnice – Metoda okrajových prvků

Srovnání diskretizace oblasti v případě aplikace metody konečných prvků a v případě aplikace metody hraničních prvků

Diskretizace celé oblasti  
(metoda konečných prvků)



Diskretizace pouze hranice  
(metoda hraničních prvků)



# Modelování v geotechnice – Metoda okrajových prvků

Pro řešení úlohy uvnitř oblasti je nutno znát tzv. fundamentální řešení: fundamentální řešení  $p_{ij}^*$ ,  $u_{ij}^*$  udává síly a posunutí **ve směru  $j$**  vyvolané působením **jednotkové síly ve směru osy  $i$**  ( je funkcí materiálových charakteristik prostředí  $G$  a  $\mu$ )

Fundamentální (Kelvinovo) řešení pro úlohy mechaniky kontinua

$$u_{ij}^* = \frac{1}{16\pi(1-\mu)Gr} \left[ (3-4\mu)\delta_{ij} + \frac{r_i}{r} \frac{r_j}{r} \right]$$

*Kroneckerova delta funkce:*

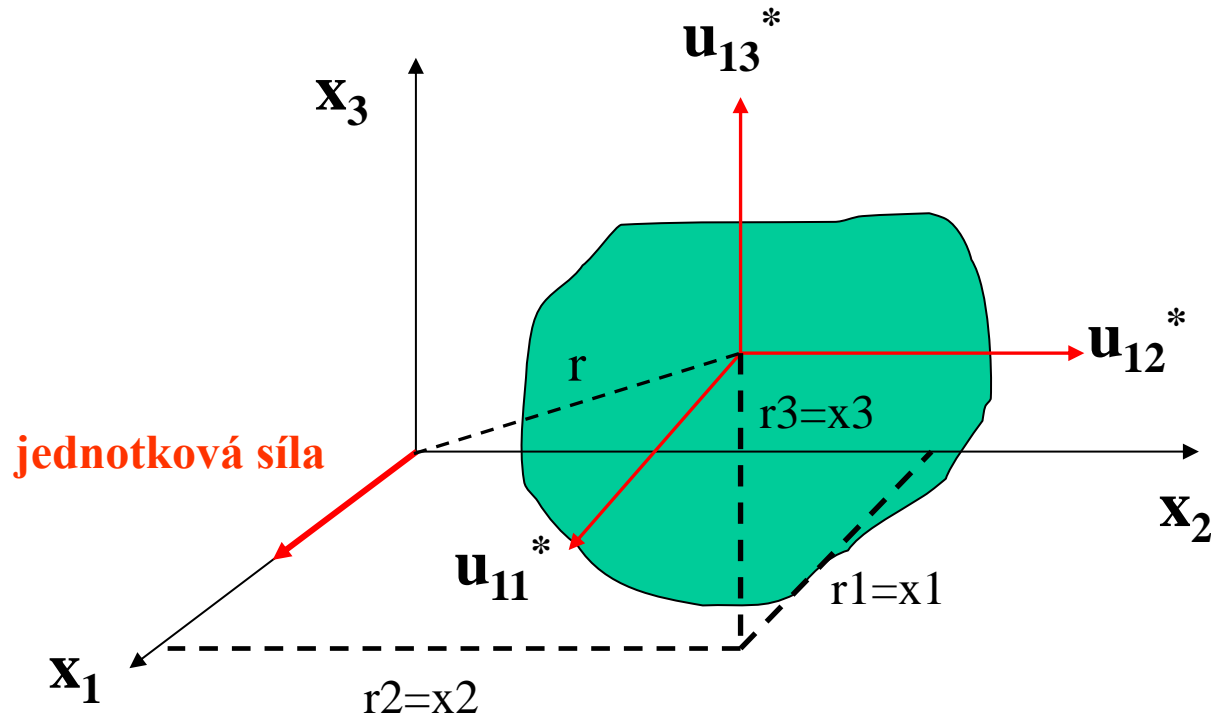
$$\delta_{ij} = 1 \text{ pro } i = j$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ pro } i \neq j$$

$$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \quad G\text{-smykový modul pružnosti, } \mu\text{-Poissonovo číslo}$$



## Podstata fundamentálního řešení



$u_{11}^*$  - posun ve směru osy  $x_1$  vyvolané působením jednotkové síly ve směru osy  $x_1$

$u_{12}^*$  - posun ve směru osy  $x_2$  vyvolané působením jednotkové síly ve směru osy  $x_1$

$u_{13}^*$  - posun ve směru osy  $x_3$  vyvolané působením jednotkové síly ve směru osy  $x_1$

## Výhody metody:

- 1) redukce dimenze úlohy o 1 ( diskretizuje se jen hranice)
- 2) menší množství vstupních dat
- 3) uvnitř oblasti dostáváme přesné řešení z numericky získaných hodnot na hranici

## Nevýhody metody:

- 1) nutno znát pro jednotlivé typy úloh fundamentální řešení (publikováno v literatuře- pro geotechnické úlohy mechaniky kontinua tzv. Kelvinovo řešení)
- 2) výsledná matice není pásová ani symetrická, ale má nižší dimenzi než v případě metody konečných prvků (nižší nároky na hardware, nižší časové nároky na výpočet)
- 3) řešení předpokládá homogenní prostředí (dáno charakteristikami analytického fundamentálního řešení)